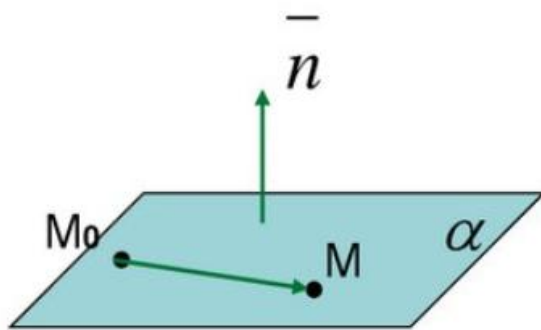


ПЛОСКОСТЬ

Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали



Задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и
вектор нормали $\vec{n} = \{A; B; C\}$,
 $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости.

$$\vec{n} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 &= 0, \\ Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) &= 0, \end{aligned}$$

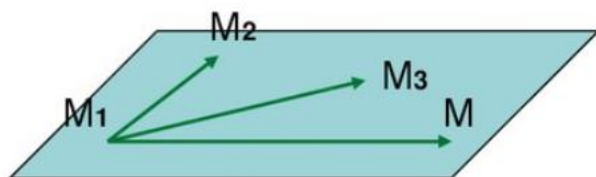
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение плоскости в «отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Здесь a , b , c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



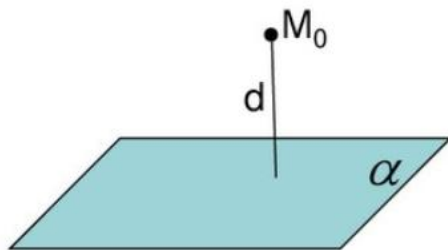
Пусть в пространстве заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости $M_1M_2M_3$.

Построим векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$,

$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$ (из условия компланарности)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости



Задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и

плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Расстояние от точки до плоскости

вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

взаимное расположение плоскостей



Плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, & \vec{n}_1 &= \{A_1; B_1; C_1\} \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. & \vec{n}_2 &= \{A_2; B_2; C_2\} \end{aligned}$$

Угол между плоскостями

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности

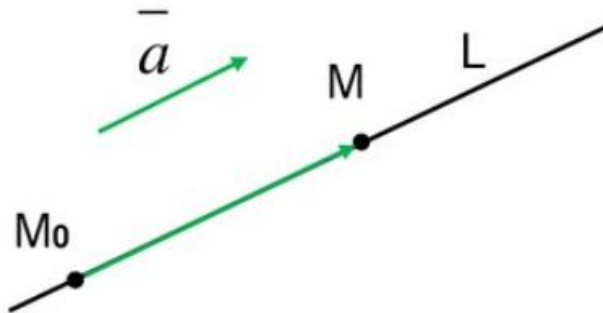
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Условие параллельности

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2 - \text{коллинеарные} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

прямая в пространстве

Канонические уравнения прямой



Прямая L однозначно может быть задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{a} = \{m; n; p\}$, Возьмём на прямой точку $M(x, y, z)$.

$\overline{M_0M}$, \vec{a} – коллинеарные \Rightarrow

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

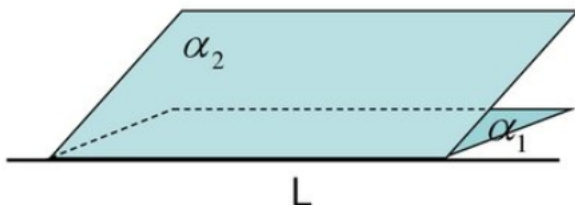
Параметрические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Общие уравнения прямой

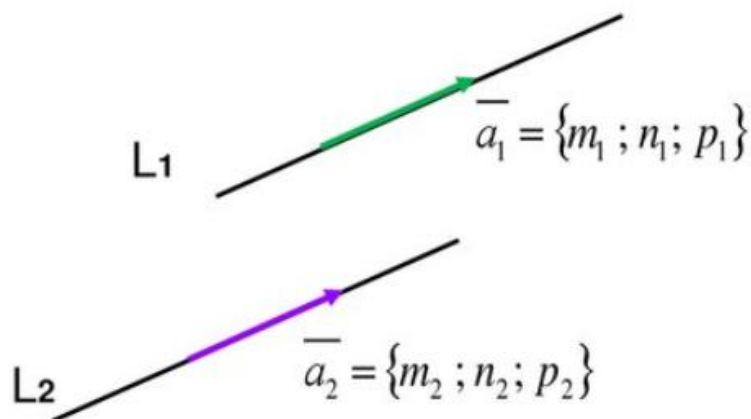
Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей:



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

взаимное расположение прямых в пространстве

Условие параллельности двух прямых

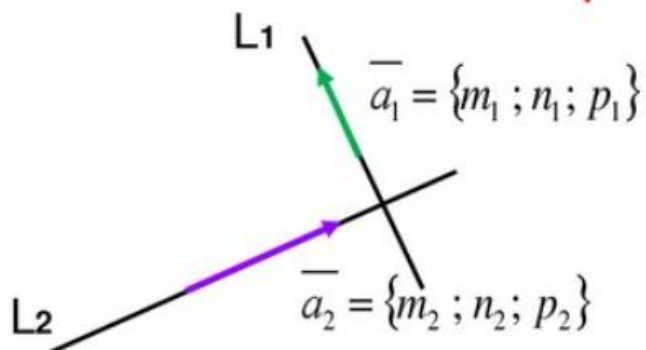


$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

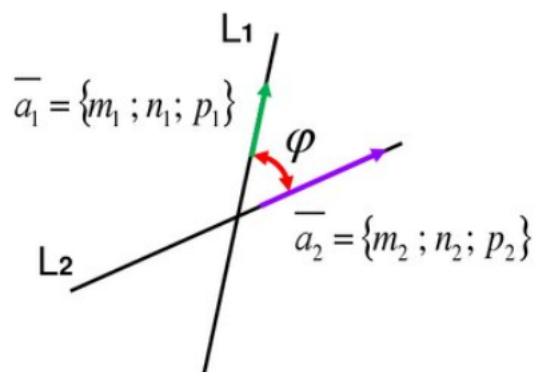
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых



$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0.$$

Угол между двумя прямыми



$$\cos \varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

взаимное расположение прямой и плоскости

Острый угол между прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

определяется из соотношения

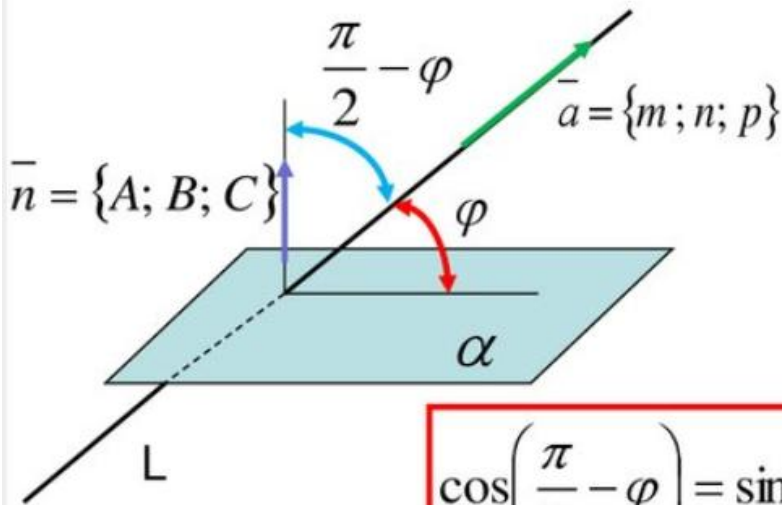
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = \frac{|A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$



Задача 1. На плоскости дан треугольник ABC с известными координатами его вершин (координаты вершин представлены ниже по вариантам).

Требуется:

написать общие уравнения прямых AB и AC;

найти длину медианы BD;

найти длину высоты, опущенной из вершины C;

написать общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне AC.

1. $A(-1; 6), B(6; 7), C(3; 2)$

2. $A(-2; 1), B(5; 2), C(4; 7)$

3. $A(-4; 5), B(7; 7), C(8; -1)$

4. $A(-1; 6), B(10; 4), C(3; -2)$

5. $A(9; -2), B(4; 8), C(-3; 4)$

6. $A(-1; 2), B(6; 1), C(3; 6)$

7. $A(-2; 5), B(5; 4), C(4; -1)$

8. $A(-4; 1), B(7; -1), C(8; 7)$

9. $A(1; 4), B(12; 2), C(-3; 2)$

10. $A(-1; -4), B(10; -2), C(3; 4)$

11. $A(5; 6), B(6; -1), C(1; 2)$

12. $A(4; 5), B(3; -2), C(-2; -1)$

13. $A(-2; 10), B(-4; -1), C(4; -2)$

14. $A(-2; -1), B(3; 9), C(10; 5)$

15. $A(-1; 7), B(1; -4), C(7; 3)$

Задача 2. Найти косинус острого угла между плоскостями α и β .

Задача 3. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин:

а) составить уравнение плоскости ΔABC ;

б) найти расстояние от вершины до плоскости ΔABC .

№ вари- анта	Задача 2		Задача 3			
	α	β	A	B	C	S
1	$4x - 2z - 1 = 0$	$3x - 3y + 5z = 0$	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
2	$2x - 4y + 6z + 2 = 0$	$5x + 2y - 6z - 5 = 0$	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;4)
3	$2x - 4y - 5z - 3 = 0$	$3x - y + 4z - 7 = 0$	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(0;-1;1)
4	$2x + 5y + 4 = 0$	$x + 2y + 4z - 1 = 0$	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
5	$4x - 2y - 3z + 1 = 0$	$3x - 4y + 3z = 0$	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
6	$4x - y + 2z + 5 = 0$	$3x + 2y + 7z - 1 = 0$	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
7	$2x - 6z + 13 = 0$	$3y - 2z + 11 = 0$	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
8	$2x - y + z + 1 = 0$	$5x - y - 5z + 2 = 0$	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
9	$3x - 4z + 2 = 0$	$4y - 3z - 7 = 0$	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
10	$4x + 2y - 5z + 3 = 0$	$x - 3y - 2z - 2 = 0$	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
11	$x - 2z + 5 = 0$	$x + 8y - 5z - 3 = 0$	(3;-2;1)	(1;0;2)	(1;2;0)	(1;-2;4)
12	$3x - 4y + z - 1 = 0$	$x + 2y - z + 4 = 0$	(1;-1;0)	(4;3;5)	(7;2;1)	(2;3;4)
13	$2x + 5y + z = 0$	$x + 4y + 2z - 1 = 0$	(1;2;3)	(3;2;1)	(4;3;1)	(2;1;7)
14	$7x - y + 2z + 3 = 0$	$7x + y + 4z + 2 = 0$	(1;2;2)	(2;3;1)	(3;2;1)	(4;5;7)
15	$x + 2y - z + 4 = 0$	$y = 4$	(2;3;1)	(3;4;1)	(4;2;0)	(5;1;2)

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно плоскостям γ_1 и γ_2 .

Задача 5. Составить уравнения сторон $\Delta A_1B_1C_1$, заданного координатами вершин.

№ вари- анта	Задача 4			Задача 5		
	M_0	γ_1	γ_2	A_1	B_1	C_1
1	(1;1;2)	$x - 2y + 3z + 5 = 0$	$2x + y - 3z + 4 = 0$	(0;1;2)	(1;0;1)	(3;4;1)
2	(1;2;3)	$2x - 3y + 4z + 7 = 0$	$x + 4y - 7z + 5 = 0$	(1;0;2)	(-1;3;4)	(5;6;7)
3	(2;4;3)	$3x + 4y - 7z + 8 = 0$	$x + 2y + 3z - 7 = 0$	(3;2;-1)	(4;5;2)	(1;2;3)
4	(2;1;-1)	$x - 2y + 4z + 8 = 0$	$x - 3y - 4z + 5 = 0$	(-3;0;1)	(5;6;2)	(4;1;3)
5	(3;2;1)	$3x - y + z - 7 = 0$	$2x - 3y + 2z - 7 = 0$	(4;5;1)	(1;3;4)	(5;2;1)
6	(-2;0;1)	$2x - 7y + z - 10 = 0$	$x + 3z + 8 = 0$	(-1;2;-3)	(3;4;5)	(4;0;5)
7	(1;0;-1)	$x - 2y - z + 1 = 0$	$2x + y - z - 5 = 0$	(7;1;8)	(9;10;1)	(2;0;3)
8	(5;1;7)	$4x - 3y + z - 1 = 0$	$x - y + 2z - 7 = 0$	(3;2;0)	(4;5;1)	(-1;2;-3)
9	(2;4;8)	$2x + 7y + 5z + 1 = 0$	$3x + y - 7z + 5 = 0$	(-6;7;0)	(0;1;4)	(2;3;1)
10	(1;1;0)	$3x - 2y + 5z + 8 = 0$	$x - 2y + 4z + 5 = 0$	(2;2;1)	(4;3;1)	(4;5;7)
11	(2;7;3)	$4x - 3y - z - 7 = 0$	$x - 3y - 3z = 0$	(8;1;9)	(2;2;3)	(4;5;3)
12	(3;4;1)	$2x - y + 3z + 4 = 0$	$x + 2y + z - 7 = 0$	(5;7;8)	(2;6;1)	(3;4;0)
13	(2;1;0)	$x + y + z - 1 = 0$	$2x - y + 2z + 5 = 0$	(0;4;5)	(7;1;8)	(1;-2;3)
14	(1;5;7)	$x - y - z + 1 = 0$	$x - 3y + 4z - 7 = 0$	(4;0;1)	(2;3;5)	(6;7;8)
15	(2;3;1)	$2x - 3y + 4z + 5 = 0$	$2x + 3y + 4z - 11 = 0$	(6;1;3)	(3;1;0)	(2;1;1)

Задача 6. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой ℓ .

Задача 7. Найти проекцию точки M_0 на плоскость α .

№ вари- анта	Задача 6	Задача 7	
	ℓ	M_0	α
1	$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$	(3;-1;1)	$2x - y + 3z + 4 = 0$
2	$\begin{cases} 3x - 5y + 41 = 0 \\ 7x - 5z + 14 = 0 \end{cases}$	(4;5;10)	$x + y - z + 7 = 0$
3	$\begin{cases} y - 4z + 8 = 0 \\ 2x - 3z - 2 = 0 \end{cases}$	(6;-2;-2)	$2x + 3y + z + 10 = 0$
4	$\begin{cases} 2x - 5y + 5 = 0 \\ 3y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$	(7;4;8)	$3x + y + 4z - 5 = 0$
5	$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$	(9;0;18)	$5x - 3y - z + 8 = 0$

6	$\begin{cases} x - 2y - 9 = 0 \\ 7x - 4z - 21 = 0 \end{cases}$	(4;1;11)	$x - 2y + 3z - 7 = 0$
7	$\begin{cases} 5x - 2y + 20 = 0 \\ 6y - 5z + 5 = 0 \end{cases}$	(4;3;6)	$x + 3y + 4z - 11 = 0$
8	$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3y - 2z + 11 = 0 \end{cases}$	(13;5;3)	$4x + 2y - 3z + 5 = 0$
9	$\begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ y - 7z + 15 = 0 \end{cases}$	(7;0;7)	$7x - 2y + 4z - 8 = 0$
10	$\begin{cases} x - 5z + 8 = 0 \\ y - 4z + 6 = 0 \end{cases}$	(-4;9;-9)	$2x + 3y - 5z + 12 = 0$

11	$\begin{cases} 7x - 2z - 21 = 0 \\ 7y - 2z = 0 \end{cases}$	(1;2;-7)	$x - 2y + 3z + 10 = 0$
12	$\begin{cases} 2x + z + 9 = 0 \\ 3x - 2y + 13 = 0 \end{cases}$	(-3;-9;15)	$2x + 5y - 6z + 11 = 0$
13	$\begin{cases} 4x - 3y - 11 = 0 \\ 2x - 3z - 13 = 0 \end{cases}$	(-8;8;-5)	$x - 3y + 7z + 8 = 0$
14	$\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ 3x + 4y - 19 = 0 \end{cases}$	(-6;9;-16)	$2x - 4y + 9z - 10 = 0$
15	$\begin{cases} 4x - 3y - 11 = 0 \\ 3y - 7z - 14 = 0 \end{cases}$	(-1;-3;11)	$3x + 5y - z - 6 = 0$

Задача 8. Найти угол между прямой ℓ и плоскостью β .

№ вари- анта	Задача 8	
	ℓ	β
1	$\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{-6}$	$-3y - 2z + 30 = 0$
2	$\frac{x+5}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-5}$	$2x - y + z + 9 = 0$
3	$\frac{x+3}{3} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{-4}$	$4y - 3z + 8 = 0$
4	$\frac{x}{3} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z+1}{1}$	$x + 2y - z + 4 = 0$
5	$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+4}{1}$	$x + 4y + 2z + 6 = 0$
6	$\frac{x+4}{2} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{1}$	$2x + 2y - z + 13 = 0$
7	$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-2}$	$3x - 3y - 5z + 1 = 0$
8	$\frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+1}{2}$	$x + 2y + 2z = 0$
9	$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-2}$	$12x - 3y - 4z + 11 = 0$
10	$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{12}$	$2x - y + z - 11 = 0$
11	$\frac{x-1}{12} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}$	$4x - 3y + 12z - 7 = 0$
12	$\frac{x+3}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-8}{5}$	$4x + 12y - 3z + 1 = 0$
13	$\frac{x+5}{-4} = \frac{y-7}{12} = \frac{z-2}{3}$	$3x + 4y - 5z - 2 = 0$
14	$\frac{x-4}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$	$5x - 3y + 4z - 1 = 0$
15	$\frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}$	$2x - 2y + z - 9 = 0$

Задача 9.

Привести уравнения кривых к каноническому виду

Построить все кривые на одной координатной плоскости

1. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0;$
2. $x^2 + y^2 - 2x - 18y + 57 = 0;$
3. $25x^2 + 64y^2 - 50x + 1536y + 7641 = 0;$
4. $x^2 + 4y^2 - 2x - 48y + 141 = 0;$
5. $x^2 + y^2 + 2x - 22y + 121 = 0;$
6. $x^2 + y^2 - 6x - 22y + 129 = 0;$
7. $4x^2 + y^2 - 24x - 22y + 153 = 0;$
8. $4x^2 + y^2 + 8x - 22y + 121 = 0;$
9. $9x^2 - 36y^2 - 18x - 144y - 459 = 0;$
10. $y^2 - 4x - 18y + 105 = 0;$
11. $y^2 + 4x - 18y + 97 = 0.$