

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
Нижнетагильский технологический институт (филиал)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Рекомендовано Учебно-методическим советом
Нижнетагильского технологического института (филиал) УрФУ
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
в качестве учебно-методического пособия
для студентов всех форм обучения, специальностей и направлений*

Нижний Тагил
2016

Рецензенты:

кафедра физико-математического образования филиала ГАОУ ДПО
Свердловской области «Институт развития образования» в г. Нижнем Тагиле
(зав. кафедрой: канд. пед. наук, доц. М. А. Ушакова);
доцент кафедры общенаучных дисциплин филиала ФГБОУ ВО
«Уральский государственный университет путей сообщения»
в г. Нижнем Тагиле К. В. Курмаева

Научный редактор: канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Феофанова

Аналитическая геометрия : учеб.-метод. пособие / авт.-сост.: С. Е. Демин, Е. Л. Демина ; М-во образования и науки РФ ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил : НТИ (филиал) УрФУ, 2016. – 272 с.

Рассматриваются вопросы раздела «Аналитическая геометрия» курса «Математика» для студентов всех специальностей всех форм обучения.

Приводятся многочисленные примеры и подробные пояснения к ним. Основу данного пособия составили лекции, прочитанные авторами в Нижнетагильском технологическом институте (филиал) УрФУ.

Учебно-методическое пособие содержит 36 типов задач (по 30 вариантов для каждого), которые позволяют формировать индивидуальную домашнюю работу студентов по данному разделу.

Рекомендовано для самостоятельной работы студентов всех форм обучения всех специальностей при изучении соответствующего раздела математики, а также для использования в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий.

Библиогр.: 11 назв. Прил. 7.

УДК 514.12

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава 1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.....	5
1. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИИ КРИВОЙ НА ПЛОСКОСТИ.....	5
2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ.....	7
2.1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному нормальному вектору.....	7
2.2. Общее уравнение прямой на плоскости.....	8
2.3. Неполные уравнения прямой.....	9
2.4. Каноническое уравнение прямой.....	10
2.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пучок прямых.....	11
2.6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.....	13
2.7. Уравнение прямой в отрезках.....	14
3. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ НА ПЛОСКОСТИ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ.....	16
3.1. Случай задания прямых уравнением с угловым коэффициентом.....	16
3.2. Случай задания общих уравнений прямых.....	17
3.3. Случай задания канонических уравнений прямых.....	17
4. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ.....	18
5. ПЛОСКИЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	40
5.1. Окружность.....	40
5.2. Эллипс.....	41
5.2.1. Уравнение эллипса.....	41
5.2.2. Форма эллипса.....	43
5.2.3. Характеристики эллипса.....	44
5.2.4. Свойства эллипса.....	45
5.2.5. Различные положения эллипса.....	46
5.3. Гипербола.....	47
5.3.1. Уравнение гиперболы.....	47
5.3.2. Форма гиперболы.....	49
5.3.3. Характеристики гиперболы.....	51
5.3.4. Свойства гиперболы.....	52
5.3.5. Различные положения гиперболы.....	53
5.4. Парабола.....	55
5.4.1. Уравнение параболы.....	55
5.4.2. Форма и характеристики параболы.....	56
5.4.3. Свойства параболы.....	57
5.4.4. Различные положения параболы.....	58
6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМ КООРДИНАТ.....	78
6.1. Параллельный перенос системы координат.....	78
6.2. Поворот системы координат.....	79
7. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	82
7.1. Общее уравнение кривой второго порядка. Центр кривой.....	82
7.2. Классификация центральных кривых второго порядка (случай $\delta \neq 0$).....	85
7.3. Классификация нецентральных кривых второго порядка (случай $\delta = 0$).....	94

8. УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ И В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВИДЕ...	107
8.1. Задание кривых в полярной системе координат.....	107
8.2. Задание кривых в параметрическом виде.....	112
ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	120
9. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	120
10. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	122
10.1. Векторное уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку.....	122
10.2. Общее уравнение плоскости.....	123
10.3. Неполные уравнения плоскости.....	124
10.4. Уравнение плоскости, проходящей через данные две точки в заданном направлении.....	125
10.5. Уравнение плоскости, проходящей через данные три точки. Уравнение плоскости в отрезках.....	126
10.6. Расстояние от точки до плоскости.....	128
10.7. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.....	129
11. ПОНЯТИЕ О ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	141
12. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	142
12.1. Общее уравнение прямой в пространстве. Уравнение пучка плоскостей.....	142
12.2. Векторное и канонические уравнения прямой в пространстве.....	143
12.3. Параметрические уравнения прямой.....	144
12.4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.....	147
12.5. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.....	148
12.6. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между прямыми в пространстве.....	152
13. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ.....	163
14. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	180
14.1. Сфера.....	180
14.2. Эллипсоид.....	181
14.3. Однополостный гиперболоид.....	183
14.4. Двуполостный гиперболоид.....	185
14.5. Эллиптический параболоид.....	187
14.6. Гиперболический параболоид.....	188
14.7. Конус второго порядка.....	190
14.8. Цилиндрические поверхности.....	192
14.9. Поверхности вращения.....	193
15. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	207
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	216
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	217

Введение

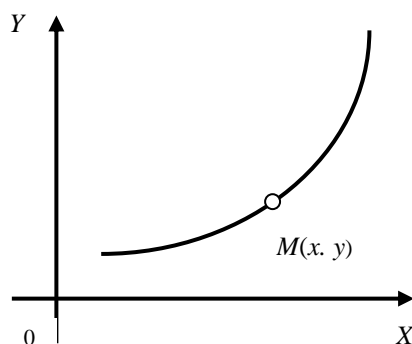
Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы – линии и поверхности (а также их частные случаи прямые и плоскости) исследуются средствами алгебры на основе *метода координат*. Объектом исследования в аналитической геометрии являются линии и поверхности, задаваемые алгебраическими уравнениями не выше второго порядка. Пространства геометрических векторов R^2 и R^3 , которые рассматриваются в аналитической геометрии, являются частным случаем евклидовых пространств.

Глава 1

Аналитическая геометрия на плоскости

1. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИИ КРИВОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим в прямоугольной системе координат OXY произвольную линию L и уравнение $F(x, y) = 0$.



Определение. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется **уравнением линии L** на плоскости OXY , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$, принадлежащей линии L , и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей L .

Другими словами, если известно уравнение линии, то относительно любой точки плоскости можно решить вопрос: лежит ли она на этой линии. Для этого достаточно координаты испытуемой точки подставить в уравнение линии вместо переменных. Если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на этой линии.

Определение. Линия называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид

$$\sum_{k=0}^m a_k x^{p_k} y^{q_k} = 0,$$

где p_k, q_k – целые неотрицательные числа, и при этом все a_k не равны нулю одновременно.

Определение. Число $N = \max_{k \in [0; m]} \{p_k + q_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*.

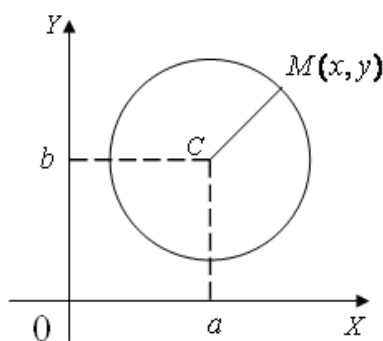
Пример 1. Прямая линия $x + 2y + 2 = 0$ представляет собой линию первого порядка, квадратная парабола $y = x^2$ – линию второго порядка, а «декартов лист» $x^3 + y^3 - xy = 0$ – линию третьего порядка.

Можно определить две основные задачи геометрии:

- по геометрическим свойствам линии найти ее уравнение;
- по уравнению линии исследовать ее геометрические свойства.

Пример 2. Найти уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(a, b)$.

По определению, окружность радиуса r с центром в точке C – множество точек плоскости, удаленных от C на расстояние r . Точка $M(x, y)$ (M – текущая точка; x, y – текущие координаты) лежит на окружности в том и только в том случае, когда $|CM| = r$.



Выражая длину отрезка CM через координаты его концов, получим, что $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, или, после возведения в квадрат:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

т. е. искомое уравнение окружности.

В частности, окружность с центром в начале координат ($a=b=0$) имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Пример 3. Уравнение $F \equiv x - y = 0$ или $x = y$. Этому уравнению линии удовлетворяют лишь те точки, которые расположены в первой и третьей четвертях на биссектрисах координатных углов.

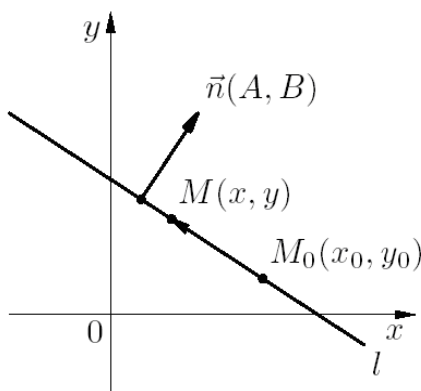
Пример 4. Уравнение $F \equiv x^2 + y^2 + 1 = 0$ не определяет никакой линии.

2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному нормальному вектору

Определение. *Нормальный вектор к прямой \vec{n} – любой ненулевой вектор, направленный перпендикулярно этой прямой.*

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0)$, лежащая на прямой, и координаты нормального вектора $\vec{n} \{A; B\}$ ($A^2 + B^2 \neq 0$).



Пусть точка $M(x, y)$ лежит на указанной прямой. Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$.

Очевидно, что вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{n} будут ортогональны тогда и только тогда, когда точка M лежит на данной прямой. Условие $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ присуще лишь точкам, лежащим на прямой, и только этим точкам.

Имеем $(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}) = 0$, откуда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Полученное уравнение есть уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} \{A; B\}$.

Пример. Даны две точки $M_1(2; -1)$ и $M_2(5; 3)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Решение:

Нормальный вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $\overline{M_1M_2} \{5 - 2; 3 + 1\}$ или $\overline{M_1M_2} \{3; 4\}$. Подставляя полученные координаты в уравнение прямой, получаем искомое уравнение прямой:

$$3(x - 2) + 4(y + 1) = 0.$$

2.2. Общее уравнение прямой на плоскости

Преобразуем полученное выше уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} \{A; B\}$. Раскрывая скобки, имеем $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Обозначая число $-Ax_0 - By_0$, стоящее во второй скобке, как $C = -Ax_0 - By_0$, получим

$$Ax + By + C = 0.$$

Данное уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Коэффициенты A и B в общем уравнении прямой имеют простой геометрический смысл: они являются проекциями нормального вектора на оси координат. Свободный член C геометрического смысла не имеет. Имеет место

Теорема. В декартовой прямоугольной системе координат любая прямая определяется уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$, и наоборот, любое уравнение первой степени определяет прямую на плоскости.

Доказательство. Уравнение каждой прямой по описанной в предыдущем пункте процедуре, может всегда быть записано в виде $Ax + By + C = 0$. Докажем обратное утверждение.

В самом деле, пусть фиксирована произвольная декартова прямоугольная система XOY и задано уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором A , B и C – какие угодно постоянные, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.

Это уравнение заведомо имеет хотя бы одно решение x_0, y_0 . Действительно, A и B одновременно не равны нулю. Пусть, например, $B \neq 0$. Тогда, взяв произвольное x_0 , из уравнения получим

$$y_0 = -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}.$$

Таким образом, существует хотя бы одна точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению первой степени, т. е. выполняется числовое равенство

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Вычитая из исходного уравнения полученное числовое равенство, приходим к уравнению

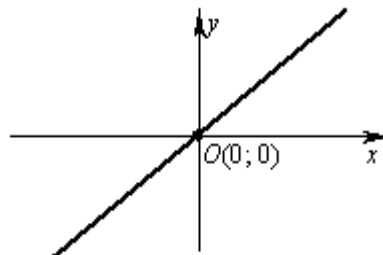
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

которое определяет прямую, проходящую через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} \{A; B\}$.

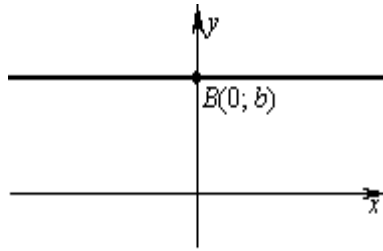
2.3. Неполные уравнения прямой

В зависимости от значений постоянных A , B и C возможны следующие частные случаи:

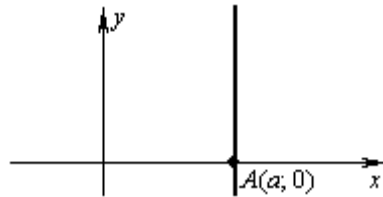
- $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат:



- $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ $\{By + C = 0\}$ – прямая параллельна оси OX :



– $B = 0, A \neq 0, C \neq 0 \{Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси OY :



– $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью OY ;

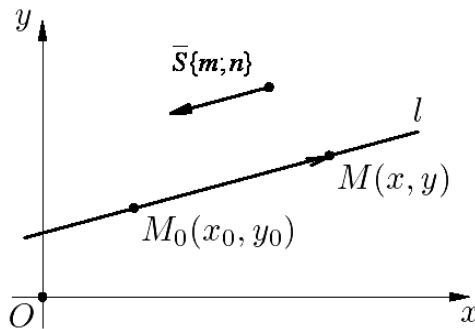
– $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью OX .

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких-либо заданных начальных условий.

2.4. Каноническое уравнение прямой

Определение. *Направляющий вектор прямой \vec{S} – любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой.*

Пусть прямая задана координатами точки $M_0(x_0; y_0)$, лежащей на прямой, и направляющим вектором $\vec{S}\{m; n\}$.



Пусть точка $M(x; y)$ лежит на указанной прямой. Составим вектор $\vec{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$.

Очевидно, что вектора $\overline{M_0M}$ и \overline{S} будут коллинеарны тогда и только тогда, когда точка M лежит на данной прямой. Это условие присуще лишь точкам, лежащим на прямой, и только этим точкам.

Так как условие коллинеарности векторов есть условие пропорциональности их соответствующих координат, имеем

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Полученное уравнение называют *каноническим уравнением прямой*.

Заметим, что в каноническом уравнении один из знаменателей m или n может оказаться равным нулю (оба числа m и n равняться нулю не могут, ибо вектор $\overline{S} \{m; n\}$ ненулевой). Всякую пропорцию

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ мы договоримся понимать как равенство $ad = bc$. Тогда *обращение в нуль одного из знаменателей в каноническом уравнении означает обращение в нуль и соответствующего числителя*.

В самом деле, если, например, $m = 0$, то, поскольку $n \neq 0$, из равенства $m(y - y_0) = n(x - x_0)$ заключаем, что $x - x_0 = 0$ – прямая, параллельная оси ординат.

Пример. Прямая задана каноническим уравнением $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0}$. Записать уравнение прямой в общем виде.

Решение:

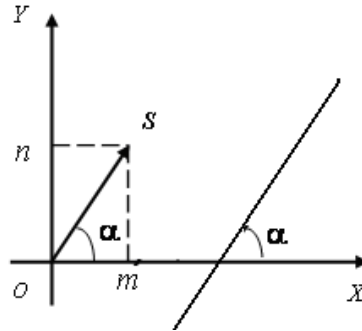
Так как обращение в нуль одного из знаменателей в каноническом уравнении означает обращение в нуль и соответствующего числителя, то $y - 2 = 0$ – искомое уравнение прямой.

2.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пучок прямых

Полученное каноническое уравнение прямой можно записать в другом виде, учитывая геометрический смысл координат направляющего вектора.

Введем понятие *углового коэффициента* $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между положительным направлением оси OX и данной прямой.

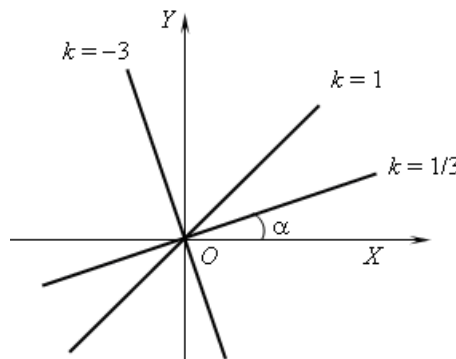


При любом расположении вектора \vec{S} относительно системы координат имеет место соотношение $k = \frac{n}{m}$ (предполагаем, что $m \neq 0$).

Подставляя выражение $n = km$ в каноническое уравнение прямой, получим $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{km}$ или $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{k}$. Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Полученное уравнение носит название *уравнения пучка прямых*.



Уравнение пучка прямых задает любую прямую на плоскости, кроме прямых, параллельных оси ординат. Поэтому его еще называют *уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*.

Преобразуем уравнение пучка прямых $y = kx + y_0 - kx_0$ и обозначим число $y_0 - kx_0$ через b .

Имеем

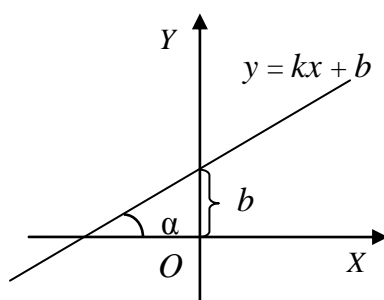
$$y = kx + b.$$

Полученное уравнение носит название *уравнение прямой с угловым коэффициентом*.

Определим геометрический смысл числа b :

$$b = y|_{x=0},$$

т. е. b – величина направленного отрезка, отсекаемого данной прямой от оси ординат.



Очевидно, что *условием параллельности* двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

Заметим, что уравнение с угловым коэффициентом не охватывает случая, когда прямая параллельна оси ординат. В этом случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha$ не существует, и уравнение прямой имеет вид $x = x_0$, где $x = x_0$ – абсцисса точки пересечения прямой с осью OX .

2.6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Запишем теперь *уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (конечно, эти точки считаются отличными друг от друга). За направляющий вектор такой прямой возьмем вектор

$$\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\},$$

и с учетом того, что прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, из канонического уравнения получим уравнение искомой прямой в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель. Действительно, записанное выше уравнение можно переписать следующим образом:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

откуда следует, что если $x_1 = x_2$, то $\forall y \ x = x_1$; $y_1 = y_2$, то $\forall x \ y = y_1$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ совпадает с *угловым коэффициентом* прямой.

Последнее уравнение можно записать в эквивалентной форме, используя понятие определителя:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; -3)$ и начало координат.

Решение:

Уравнение прямой имеет вид

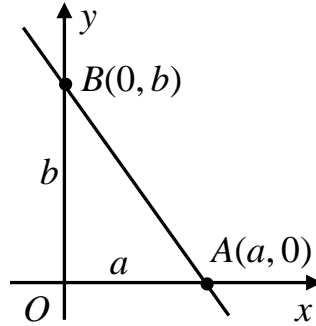
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$. Подставляя значения в уравнения прямой, получим

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

2.7. Уравнение прямой в отрезках

Рассмотрим прямую, не проходящую через начало координат и не параллельную координатным осям. Положение такой прямой полностью определяется координатами точек пересечения ее с координатными осями.



Пусть прямая пересекается с координатными осями в точках $A(a; 0)$ и $B(0; b)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две заданные точки, получим

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}, \text{ или после преобразований } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Полученное уравнение прямой носит название *уравнение прямой в отрезках*.

Заметим, что в уравнении «в отрезках» числа a и b имеют простой геометрический смысл: они равны *величинам* отрезков, которые отсекает прямая на осях Ox и Oy соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат).

Если прямая задана в общем виде $Ax + By + C = 0$, и коэффициенты A , B и C отличны от нуля, то можно записать уравнение в отрезках в виде

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1,$$

где $a = -C/A$, $b = -C/B$.

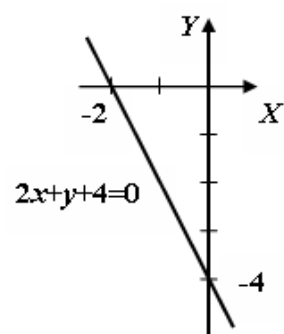
Заметим еще раз, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках: прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнением в отрезках.

Пример. Задано общее уравнение прямой $2x + y + 4 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

Решение:

Прямая задана общим уравнением. Находим числа a и b : $a = -C/A = -2$, $b = -C/B = -4$, и искомое уравнение:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} = 1.$$

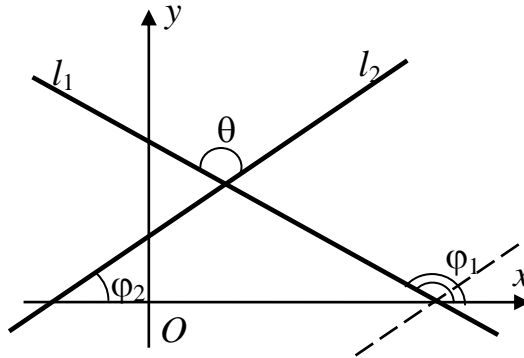


3. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ НА ПЛОСКОСТИ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

3.1. Случай задания прямых уравнением с угловым коэффициентом

Пусть две прямые заданы своими уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1x + b_1$; $y = k_2x + b_2$.

Найдем угол θ между этими прямыми.



Очевидно, что $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$, тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Заметим, что $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$, получим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Обращаем внимание, что в полученной формуле находится угол поворота против часовой стрелки от прямой с угловым коэффициентом k_2 до прямой с угловым коэффициентом k_1 . Для определения угла между прямой k_1 и прямой k_2 необходимо в числителе дроби взять $k_2 - k_1$. Условие параллельности ($\theta = 0$, $\operatorname{tg} \theta = 0$) очевидно: $k_1 = k_2$.

Для получения условия перпендикулярности прямых $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{ctg} \theta = 0$ перепишем формулу для угла между прямыми в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2}.$$

Поэтому условие перпендикулярности имеет вид $k_1 k_2 = -1$.

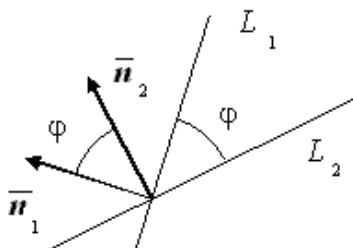
3.2. Случай задания общих уравнений прямых

Пусть две прямые заданы общими уравнениями:

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Так как нормальные вектора прямых имеют вид $\overline{n_1} \{A_1, B_1\}$ и $\overline{n_2} \{A_2, B_2\}$, то угол между прямыми L_1 и L_2 равен углу между нормальными векторами к этим прямым. Из определения скалярного произведения имеем

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$



Условие параллельности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ этих прямых, т. е. пропорциональности их координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ этих прямых, т. е. равенство нулю их скалярного произведения:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

3.3. Случай задания канонических уравнений прямых

Пусть две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \quad \text{и} \quad L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых L_1 и L_2 являются вектора $\overline{S_1} \{m_1, n_1\}$ и $\overline{S_2} \{m_2, n_2\}$, то по аналогии получаем:

$$1. \text{ Угол между двумя прямыми: } \cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

$$2. \text{ Условие параллельности двух прямых: } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

$$3. \text{ Условие перпендикулярности двух прямых: } m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

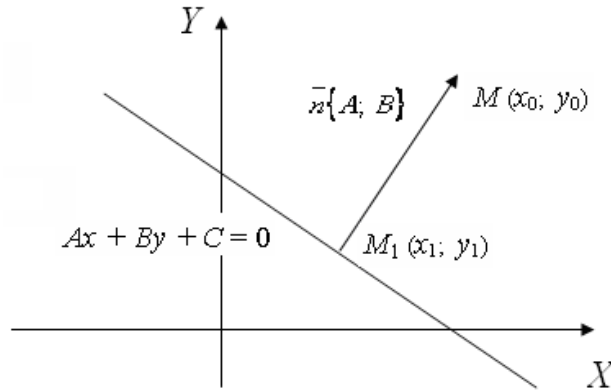
Условия	Случай		
	уравнений с угловыми коэффициентами	общих уравнений	канонических уравнений
Параллельность	$k_1 = k_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$
Перпендикулярность	$k_1 \cdot k_2 = -1$	$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$	$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

4. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Теорема. Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние от нее до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую.



Рассмотрим скалярное произведение векторов $\vec{n}\{A; B\}$ и $\overline{M_1M}\{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$:

$$(\vec{n} \cdot \overline{M_1M}) = \pm |\vec{n}| \cdot |\overline{M_1M}| = \pm d |\vec{n}|.$$

Знак «+» соответствует случаю одинакового направления векторов, знак «-» – противоположному.

С другой стороны, то же скалярное произведение можно выразить через проекции векторов:

$$(\vec{n} \cdot \overline{M_1M}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1).$$

Приравнявая правые части получившихся уравнений, имеем

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = \pm d |\vec{n}|.$$

Раскроем скобки, прибавим и вычтем C :

$$Ax_0 + By_0 + C - (Ax_1 + By_1 + C) = \pm d |\vec{n}|.$$

Так как точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на прямой $Ax + By + C = 0$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, и уравнение приобретает следующий вид:

$$Ax_0 + By_0 + C = \pm d |\vec{n}|, \text{ откуда } d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{|\vec{n}|},$$

или окончательно, $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Теорема доказана.

Таким образом, чтобы найти расстояние от точки до прямой, нужно в левую часть общего уравнения прямой подставить вместо те-

кущих координат координаты данной точки, взять это число по модулю и разделить на длину нормального вектора прямой.

Пример 1. Найти расстояние от точки $M_0(5; 7)$ до прямой $2x - 3y - 4 = 0$.

Решение:

Имеем $A = 2$; $B = -3$; $C = -4$; $x_0 = 5$; $y_0 = 7$;

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{13}} = \frac{15}{\sqrt{13}} \approx 4,16.$$

Пример 2. Найти расстояние между прямыми $3x + 4y - 15 = 0$ и $3x + 4y + 12 = 0$.

Решение:

Так как угловые коэффициенты обеих прямых равны, то данные прямые параллельны.

Для нахождения расстояния между ними возьмем произвольную точку на одной из них и найдем расстояние от этой точки до второй прямой.

Выберем точку $M_0(5; 0)$ на первой прямой, тогда

$$d = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|27|}{\sqrt{25}} = \frac{27}{5}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется уравнением линии на плоскости? Приведите примеры уравнений линий на плоскости.
2. Что называется общим уравнением прямой на плоскости?
3. Дайте определение нормального вектора прямой. В чем состоит геометрический смысл коэффициентов A и B общего уравнения прямой?
4. Запишите в общем виде уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.
5. Как расположена прямая по отношению к координатным осям, если один из коэффициентов в ее общем уравнении равен нулю? Приведите примеры.
6. Запишите в общем виде каноническое уравнение прямой. Каков геометрический смысл входящих в это уравнение коэффициентов?
7. Как записывается уравнение прямой, если одна из координат ее направляющего вектора равна нулю?
8. Что называется угловым коэффициентом прямой, не параллельной оси ординат? Какие значения может принимать угловой коэффициент прямой на плоскости?

9. Как выводится уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении?
10. Выведите уравнение прямой, проходящей через две точки.
11. Сформулируйте и докажите условия параллельности (перпендикулярности) прямых, заданных общими уравнениями.
12. Сформулируйте и докажите условия параллельности (перпендикулярности) прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.
13. Дайте определение угла между двумя пересекающимися прямыми.
14. Выведите формулу для вычисления тангенса угла между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами.
15. По какой формуле находится расстояние от данной точки до прямой, заданной общим уравнением?

Практическая часть 1

Прямая на плоскости

Пример 1. Дана прямая $y + 2x + 6 = 0$. Выписать ее вектор нормали, найти угловой коэффициент, построить прямую на плоскости.

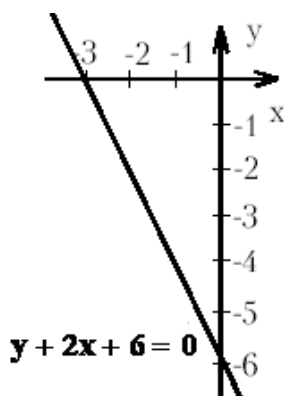
Решение:

Сравнивая уравнение данной прямой с общим уравнением прямой, замечаем, что в нашем случае $A = 2$ (коэффициент при x), $B = 1$ (коэффициент при y), поэтому $\vec{n} \{2; 1\}$. Чтобы найти угловой коэффициент, исходное уравнение необходимо разрешить относительно y :

$$y = -2x - 6.$$

Сравнивая с уравнением прямой с угловым коэффициентом, замечаем, что $k = -2$.

Для построения прямой необходимо знать координаты двух точек, через которые проходит прямая: $x = 0 \Rightarrow y = -6$; $y = 0 \Rightarrow x = -3$. Итак, остается провести прямую, проходящую через точки $A(0; -6)$, $B(-3; 0)$.



Пример 2. Выбрать из прямых (I)–(VI) параллельные и перпендикулярные:

$$(I) \ y - 3x - 2 = 0; \quad (II) \ 2x + 6y = 0; \quad (III) \ 3x - y = 5;$$

$$(IV) \ x - 3y + 3 = 0; \quad (V) \ x + 3y - 7 = 0; \quad (VI) \ x + y = 2.$$

Решение:

Сначала для каждой прямой найдем угловой коэффициент:

$$(I): \ y - 3x - 2 = 0; \ y = 3x + 2; \ k_1 = 3;$$

$$(II): \ 2x + 6y = 0; \ 6y = -2x; \ y = -\frac{1}{3}x; \ k_2 = -\frac{1}{3};$$

$$(III): \ 3x - y = 5; \ y = 3x - 5; \ k_3 = 3;$$

$$(IV): \ x - 3y + 3 = 0; \ 3y = x + 3; \ y = \frac{1}{3}x + 1; \ k_4 = \frac{1}{3};$$

$$(V): \ x + 3y - 7 = 0; \ 3y = -x + 7; \ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}; \ k_5 = -\frac{1}{3};$$

$$(VI): \ x - y = 2; \ y = x - 2; \ k_6 = 1.$$

Поскольку $k_1 = k_3$, $k_2 = k_5$, получаем, что прямые (I) и (III), (II) и (V) параллельны.

С другой стороны, $k_1 k_2 = -1$, а потому прямые (I) и (II) перпендикулярны (следовательно, перпендикулярны и прямые (III) и (II), (I) и (V)).

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$ и образующей с положительным направлением оси OX угол 120° .

Решение:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Координаты точки известны, а угловой коэффициент k – это тангенс угла наклона, т. е. $k = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$. Подставляя, имеем $y - (-3) = -\sqrt{3}(x - 2)$, или $y + \sqrt{3}x + (3 - 2\sqrt{3}) = 0$.

Пример 4. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2; -3)$ параллельно и перпендикулярно прямой $2y + 4x - 5 = 0$.

Решение:

Найдем угловой коэффициент данной прямой: $y = -2x + \frac{5}{2}$. Поэтому $k_1 = -2$.

Для составления уравнения прямой, проходящей через $A(2; -3)$ параллельно данной прямой, воспользуемся уравнением $y - y_1 = k_1(x - x_1)$:

$$y - (-3) = -2(x - 2), \text{ или } y + 2x - 1 = 0.$$

Результат можно проверить, подставив в полученное выражение координаты заданной точки: $-3 + 2 \cdot 2 - 1 \equiv 0$ (если получили тождество, как в данном примере, уравнение составлено правильно).

Аналогично действуем при составлении уравнения перпендикулярной прямой, только используем $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$: $y - (-3) = \frac{1}{2}(x - 2)$, $2(y + 3) = x - 2$ и окончательно $2y - x + 8 = 0$.

Проверка: $2(-3) - 2 + 8 \equiv 0$.

Пример 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; 3)$, $B(-1; 5)$.

Решение:

$$\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}.$$

Подставляя координаты данных точек, получаем

$$\frac{y - 5}{3 - 5} = \frac{x - (-1)}{3 - (-1)}; \quad \frac{y - 5}{-2} = \frac{x + 1}{4}; \quad 2(y - 5) = -(x + 1).$$

Таким образом, мы приходим к уравнению $2y + x - 9 = 0$.

Проверить результат можно, подставляя в него координаты точек (как при проверке в примере 4).

Действительно, $2 \cdot 3 + 3 - 9 \equiv 0$, $2 \cdot 5 + (-1) - 9 \equiv 0$.

Пример 6. Дано общее уравнение прямой $2x - 5y - 3 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Решение:

Уравнение этой прямой в отрезках $\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y = 1$ или

$$\frac{x}{(3/2)} + \frac{y}{(3/5)} = 1.$$

Уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$.

Пример 7. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 4 см^2 .

Решение:

Уравнение прямой имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = b$. По условию задачи $S = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} = 4$, откуда $a = \pm 2\sqrt{2}$. Значение $a = -2\sqrt{2}$ не удовлетворяет условию задачи. Тогда искомое уравнение прямой $\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = 1$ или $x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

Пример 8. Через точку $M_0(1; 3)$ провести прямую под углом 45° к прямой $x - 2y = 0$.

Решение:

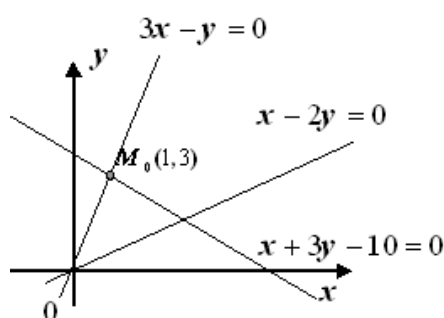
Обозначим угловой коэффициент искомой прямой через k_2 , тогда данная прямая имеет угловой коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Из условия задачи тангенс угла между этими прямыми $\text{tg } \theta = 1$, с другой стороны

$$\text{tg } \theta = \pm \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \text{ откуда } 1 = \pm \frac{\frac{1}{2} - k_2}{1 + \frac{1}{2} k_2}, \text{ т. е.: а) } k_2 = 3 \text{ или б) } k_2 = -\frac{1}{3}.$$

Теперь нетрудно написать уравнения этих прямых:

а) $3x - y = 0$;

б) $x + 3y - 10 = 0$.



Пример 9. На прямой $x + y - 6 = 0$ найти точку M , равноудаленную от точек $A(3; 5)$ и $B(2; 6)$.

Решение:

Обозначим координаты точки M как $M(x_M; y_M)$.

Тогда $MA = \sqrt{(x_M - 3)^2 + (y_M - 5)^2}$, $MB = \sqrt{(x_M - 2)^2 + (y_M - 6)^2}$,
и с учетом $MA = MB$ имеем

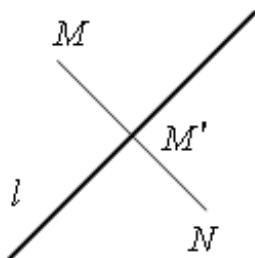
$$x_M - y_M + 3 = 0.$$

Точка $M(x_M; y_M)$ лежит на прямой $x + y - 6 = 0$, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению прямой.

$$\text{Тогда } \begin{cases} x_M - y_M + 3 = 0, \\ x_M + y_M + 6 = 0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_M = 1, \\ y_M = 4, \end{cases} \text{ т. е. } M(1; 4).$$

Пример 10. Найти точку, симметричную точке $M(4; 5)$ относительно прямой $l: 8x + 6y - 37 = 0$.

Решение:



Пусть N — искомая точка. Точки M и N лежат на прямой MN , перпендикулярной прямой l , и равноудалены от этой прямой, т. е. $MM' = M'N$, где M' — проекция точки M на данную прямую.

Найдем уравнение прямой MN . Так как угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -\frac{4}{3}$, то угловой коэффициент прямой MN должен быть $k_2 = \frac{3}{4}$. Тогда уравнение прямой MN имеет вид $y - 5 = \frac{3}{4}(x - 4)$ или $3x - 4y + 8 = 0$.

Найдем координаты точки M' :

$$\begin{cases} 8x + 6y - 37 = 0, \\ 3x - 4y + 8 = 0, \end{cases}$$

откуда $M'\left(2; \frac{7}{2}\right)$. Так как точка $M'\left(2; \frac{7}{2}\right)$ делит пополам отрезок MN , координаты точки N могут быть найдены из соотношений

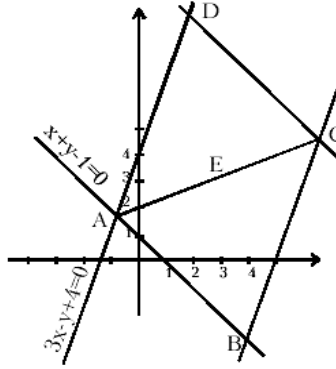
$$2 = \frac{4 + x}{2} \text{ и } \frac{7}{2} = \frac{5 + y}{2},$$

откуда $N(0; 2)$.

Пример 11. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $x + y - 1 = 0$ и $3x - y + 4 = 0$, а также точка пересечения его диагоналей $E(3; 3)$. Найти уравнение двух других сторон параллелограмма.

Решение:

Так как коэффициенты в уравнениях сторон параллелограмма не пропорциональны, то даны пересекающиеся стороны. Пусть это стороны AB и AC .



1. Найдем координаты точки A как точки пересечения двух прямых:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = -4, \end{cases}$$

откуда $4x = -3$, и $A\left(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right)$.

2. Далее, пусть точка C – точка пересечения искомых сторон. Точка $E(3; 3)$ делит диагональ AC пополам. Значит:

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2}, \text{ откуда } x_C = 2x_E - x_A = 2 \cdot 3 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{4},$$

$$y_E = \frac{y_A + y_C}{2}, \text{ откуда } y_C = 2y_E - y_A = 2 \cdot 3 - \frac{7}{4} = \frac{17}{4}.$$

$$\text{Итак, } C\left(\frac{27}{4}; \frac{17}{4}\right).$$

3. Найдем уравнение прямой CD . Для этого найдем угловой коэффициент прямой из условия параллельности прямых AB и CD : $k_{AB} = -1$, откуда $k_{CD} = -1$, и уравнение пучка прямых для точки C имеет вид $y - y_C = k_{CD}(x - x_C)$ или $y - \frac{17}{4} = -\left(x - \frac{27}{4}\right)$, откуда уравнение стороны CD имеет вид $4x + 4y - 44 = 0$ или, окончательно, $x + y - 11 = 0$.

4. Найдем уравнение прямой CB . Для этого найдем угловой коэффициент прямой из условия параллельности прямых AD и CB : $k_{AD} = 3$, откуда $k_{CB} = 3$, и уравнение пучка прямых для точки C имеет вид $y - y_C = k_{CB}(x - x_C)$ или $y - \frac{17}{4} = 3\left(x - \frac{27}{4}\right)$, откуда уравнение стороны CB имеет вид $12x - 4y - 64 = 0$ или, окончательно, $3x - y - 16 = 0$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.
2. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.
3. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ параллельно противоположным сторонам.
4. Даны последовательные вершины выпуклого четырехугольника $A(-3; -1)$, $B(3; 9)$, $C(7; 6)$ и $D(-2; -6)$. Определить точку пересечения его диагоналей.
5. Даны две смежные вершины $A(-3; -1)$ и $B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3; 0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.
6. Определить, при каком значении m две прямые $mx + (2m + 3 + m + 6 = 0)$, $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.
7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$.

Ответы:

1. $(1; -3)$, $(-2; 5)$, $(5; -9)$, $(8; -17)$.
2. $3x + 2y = 0$; $2x - 3y - 13 = 0$.
3. $5x - 2y - 33 = 0$; $x + 4y - 1 = 0$; $7x + 6y + 33 = 0$.
4. $(1; 3)$.
5. $3x - 5y + 4 = 0$; $x + 7y - 16 = 0$; $3x - 5y - 22 = 0$;
 $x + 7y + 10 = 0$.
6. $m_1 = 0$; $m_2 = 6$.
7. $74x + 13y + 39 = 0$.

Тестовые задания 1 Прямая на плоскости

1. Алгебраической линией 1-го порядка на плоскости является линия с уравнением:

а) $y = kx^2 + b$; б) $y^2 = k(x - x_0) + y_0$; в) $|Ax + By + C| = 0$; г) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

2. Общее уравнение прямой имеет вид:

а) $Ax + By + Cz = 0$; б) $Ax + By + C = 0$;
в) $Ax + By + Cz + D = 0$; г) $Ax + By + Cz = 1$.

3. Общее уравнение прямой L на плоскости имеет вид:

а) $Ax + By + C = 0$, где $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ ортогонален прямой L ;

б) $Ax + By + C = 0$, где $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ направляющий вектор прямой L ;

в) $y = Ax + B$, где $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ направляющий вектор прямой L .

4. Уравнения прямых $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$; (1)

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt; \end{cases} \quad (2)$$

$$y = kx + b \quad (3)$$

называются соответственно:

а) (1) – параметрическим, (2) – каноническим, (3) – с угловым коэффициентом;

б) (1) – каноническим, (2) – параметрическим, (3) – с угловым коэффициентом;

в) (1) – с угловым коэффициентом, (2) – каноническим, (3) – параметрическим.

5. Из представленных ниже уравнений укажите общее уравнение прямой на плоскости:

а) $y = kx + b$;

б) $Ax + By + C = 0$;

в) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$;

г) $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0. \end{cases}$

6. Угловой коэффициент прямой $6x - 3y + 7 = 0$ равен:

а) 2;

б) $\frac{1}{2}$;

в) $-\frac{7}{3}$;

г) $\frac{6}{7}$.

7. Уравнение прямой $3x + 4y - 12 = 0$ записать в форме прямой с угловым коэффициентом:

а) $y = \frac{4}{3}x - 1$;

б) $y = \frac{4}{3}x + 12$;

в) $y = -\frac{3}{4}x + 3$;

г) $y = \frac{3}{4}x - 3$.

8. Для данного уравнения прямой $3x + 6y = -18$, уравнение «в отрезках» имеет вид:

а) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-3} = 1$; б) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{3} = 1$; в) $-\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 1$; г) $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$.

9. Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-1; 3)$ и $B(4; -2)$ имеет вид:

а) $y = x + 2$; б) $y = x - 2$; в) $y = -x - 2$; г) $y = -x + 2$.

10. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; -4)$; $B(0; 5)$ имеет вид:

а) $6x - y + 3 = 0$; б) $9x - y + 5 = 0$;
в) $7x + 2y = 0$; г) $3x + 4y - 1 = 0$.

11. Угловым коэффициентом прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $O(0,0)$ равен:

а) 6; б) -1; в) 2; г) 11.

12. Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; б) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$; в) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$; г) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1$.

13. Уравнение прямой с угловым коэффициентом определяется формулой:

а) $y = kx^2 + b$; б) $y = kx$; в) $y = kx^2 + bx$; г) $y = kx + b$.

14. Для прямой $4x + 8y + 16 = 0$, уравнение с угловым коэффициентом:

а) $y = \frac{x}{2} + 4$; б) $y = -\frac{x}{2} - 2$; в) $y = \frac{x}{2} - 2$; г) $y = -\frac{x}{2} - 4$.

15. На прямой $x - 5y + 42 = 0$ лежит точка с координатами:

а) $(-7, 7)$; б) $(-6, 6)$; в) $(-3, -7)$; г) $(-3, 7)$.

16. Координаты точки пересечения двух прямых $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$ равны:

а) $\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$; б) $(8; 7)$; в) $\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{7}\right)$; г) $(24; 21)$.

17. Точкой пересечения прямых $5x - y - 7 = 0$ и $3x + 2y - 12 = 0$ является:

- а) $(-3; 2)$; б) $(4; 1)$; в) $(2; 3)$; г) $(0; 0)$.

18. Произведение координат точки пересечения прямых $2x + y - 1 = 0$ и $x - y - 5 = 0$ равно:

- а) 6; б) -1 ; в) 24; г) -6 ; д) 11.

19. Прямая, проходящая через точку $A(2; -5)$, составляет с осью Ox угол 45° и пересекает ее в точке $x_0 = \dots$

- а) 5; б) 7; в) -7 ; г) -5 .

20. Прямая, проходящая через точки $A(5, 4)$ и $B(6, 5)$, образует с осью OX угол (в градусах):

- а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .

21. Угол (в градусах) между прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $4x - 3y + 10 = 0$ равен:

- а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .

22. Прямые $2x - 3y + 6 = 0$ и $Ax + 4y - 34 = 0$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке $M(x; y)$:

- а) $M(3; 4)$; б) $M(1; 2)$; в) $M(4; 3)$; г) $M(6; 6)$.

23. Из т. $O(0; 0)$ на прямую $y = 2x + 5$ опущен перпендикуляр, который пересекает ее в точке $M(x; y)$:

- а) $M(3; 3)$; б) $M(-2; 1)$; в) $M(4; 3)$; г) $M(6; 2)$.

24. Расстояние от начала координат до прямой $3x + 4y - 25 = 0$ равно:

- а) 5; б) 7; в) 3; г) -5 .

25. Если даны две прямые $\begin{cases} 5x - y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$, то угол между ними равен:

- а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .

26. Для прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ условием перпендикулярности является:

- а) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$;
 в) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; г) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

27. Значение параметра s , при котором прямые $sx - y + 11 = 0$ и $7x + 10y + 8 = 0$ перпендикулярны, равно:

- а) $-\frac{1}{10}$; б) -5 ; в) $\frac{10}{7}$; г) -2 .

28. Значение параметра p , при котором прямые $-5x + py - 6 = 0$ и $x - 4y - 4 = 0$ параллельны, равно:

- а) 20 ; б) $\frac{3}{2}$; в) -5 ; г) 2 .

Домашнее задание

Выполните задания 1–2 из прил. 1.

Практическая часть 2

Расчет треугольника на плоскости

Пример 1. В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(3; 3)$, $B(-1; 5)$ найти уравнение стороны AB , медианы AE , высоты OK , а также длину высоты OK .

Решение:

$$AB: \frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}, \quad \frac{y - 5}{3 - 5} = \frac{x - (-1)}{3 - (-1)}, \quad 2(y - 5) = -(x + 1), \\ 2y + x - 9 = 0.$$

Далее, по определению медианы треугольника точка E – середина отрезка BO , поэтому ее координаты равны:

$$x_E = \frac{x_B + x_O}{2} = \frac{-1 + 0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y_E = \frac{y_B + y_O}{2} = \frac{5 + 0}{2} = \frac{5}{2}.$$

AE : уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; 3)$ и $E(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$:

$$\frac{y - 5/2}{3 - 5/2} = \frac{x - (-1/2)}{3 - (-1/2)}, \quad \frac{2y - 5}{1} = \frac{2x + 1}{7}, \quad 7y - x - 18 = 0.$$

Итак, уравнение медианы AE имеет вид $7y - x - 18 = 0$.

Далее, высота OK – это прямая, проходящая через вершину O перпендикулярно прямой AB .

Угловым коэффициентом k_1 прямой AB находим из уравнения $2y + x - 9 = 0$:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}, \quad k_1 = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $k_2 = -\frac{1}{k_1} = 2$, $y - 0 = 2(x - 0)$, и уравнение высоты OK $y = 2x$.

Теперь найдем координаты K – точки пересечения построенной высоты и прямой AB . Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y + x - 9 = 0, \\ y = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 9, \\ y = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9/5, \\ y = 18/5. \end{cases}$$

Итак, $K(\frac{9}{5}; \frac{18}{5})$.

Длина высоты OK :

$$|OK| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} = \sqrt{\frac{9^2}{25} + \frac{18^2}{25}} = \sqrt{\frac{81 + 324}{25}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 5}{25}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

Пример 2. В треугольнике с вершинами $A(2; -1)$, $B(-7; 3)$, $C(-1; -5)$, найти уравнение биссектрисы угла C .

Решение:

Найдем точку пересечения M биссектрисы угла C со стороной AB .

Известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон треугольника.

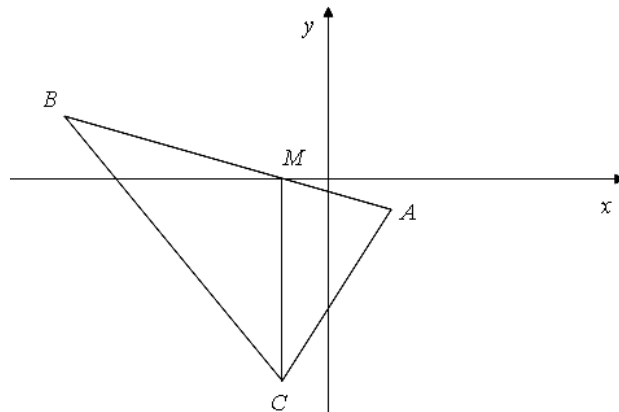
$$\text{Следовательно, } \lambda = \frac{BM}{MA} = \frac{CB}{CA}.$$

По условию задачи $CB = \sqrt{(-1+7)^2 + (-5-3)^2} = 10$,
 $CA = \sqrt{(-1-2)^2 + (-5+1)^2} = 5$, $\lambda = 2$, и координаты точки M :

$$x_M = \frac{x_B + \lambda x_A}{1 + \lambda}; \quad y_M = \frac{y_B + \lambda y_A}{1 + \lambda};$$

$$x_M = \frac{-7 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = -1; \quad y_M = \frac{3 + 2(-1)}{1 + 2} = \frac{1}{3}; \quad M \left(-1; \frac{1}{3} \right).$$

Уравнение биссектрисы CM запишем как уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x - (-1)}{-1 - (-1)} = \frac{y - 5}{\frac{1}{3} - 5}$ или $\frac{x + 1}{0} = \frac{y - 5}{\frac{1}{3} - 5}$, следовательно, $x + 1 = 0$ – уравнение биссектрисы.



Очевидно, что биссектриса параллельна оси OY , т. к. абсциссы точек C и M совпадают.

Пример 3. Даны координаты трех точек: $A (4; 4)$, $B (6; 3)$, $C (3; 6)$:

- 1) проверить, не лежат ли точки на одной прямой, составить уравнение прямой AB ;
- 2) уравнение высоты CK треугольника ABC ;
- 3) уравнение медианы AD треугольника ABC ;
- 4) координаты точки пересечения высоты CK и медианы AD ;
- 5) угол между медианой AD и высотой AC ;
- 6) площадь треугольника ABC ;
- 7) внутренние углы треугольника ABC .

Решение:

1. Проверить, не лежат ли точки на одной прямой, составить уравнение прямой AB .

Составим уравнение стороны AB :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}; \quad \frac{x - 4}{2} = \frac{y - 4}{-1}; \quad -x + 4 = 2y - 8;$$

$$AB: x + 2y - 12 = 0.$$

Подставим в полученное уравнение координаты точки C : $3 + 12 - 12 \neq 0$, значит, точка C не лежит на одной прямой с точками A и B .

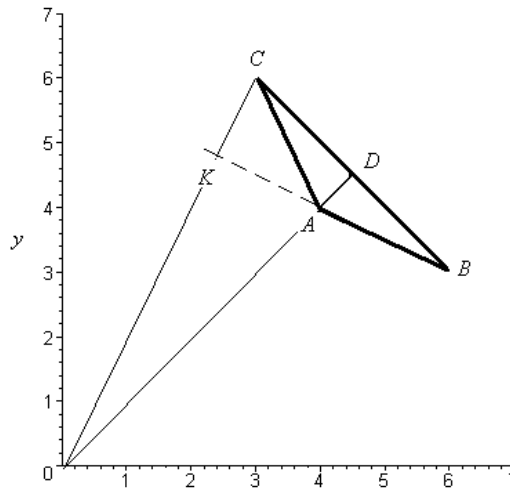
2. Уравнение высоты CK треугольника ABC .

По условию, CK перпендикулярна стороне AB , значит, направляющий вектор прямой CK перпендикулярен направляющему вектору прямой AB : $\vec{n}_{AB} = (2; -1)$.

Из условия $\vec{n}_{AB} \perp \vec{n}_{CK}$ получаем

$$\vec{n}_{AB} \cdot \vec{n}_{CK} = 0; \quad 2x - y = 0.$$

Положим, $x = 1$, тогда $y = 2$, и $\vec{n}_{CK} = (1; 2)$.



Тогда уравнение высоты CK :

$$\frac{x - x_C}{1} = \frac{y - y_C}{2}; \quad \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 6}{2}; \quad 2x - 6 = y - 6; \quad 2x - y = 0.$$

Искомое уравнение $2x - y = 0$.

3. Уравнение медианы AD треугольника ABC .

По условию D – середина BC , значит:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6 + 3}{2} = 4,5; \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + 6}{2} = 4,5.$$

Уравнение медианы AD имеет вид

$$\frac{x - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y - y_A}{y_D - y_A}; \quad \frac{x - 4}{0,5} = \frac{y - 4}{0,5}; \quad x = y.$$

Искомое уравнение $x - y = 0$.

4. Координаты точки пересечения высоты CK и медианы AD . Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Высота пересечется с медианой в начале координат.

5. Угол между медианой AD и высотой AC найдем средствами векторной алгебры, т. е. через скалярное произведение. Если в задаче указано, что надо найти тангенсы углов, то решение ищем через угловые коэффициенты: $\overrightarrow{AD} = (0,5; 0,5)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 2)$.

$$\cos \alpha = \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-0,5 + 1}{\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{0,5}{\sqrt{2,5}} = 0,316, \quad \angle CAD \approx 72^\circ.$$

6. Площадь треугольника ABC найдем, не используя методы векторной алгебры. Для этого определим координаты точки K :

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} x + 2y - 12 = 0, \\ CK: & \begin{cases} 2x - y = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

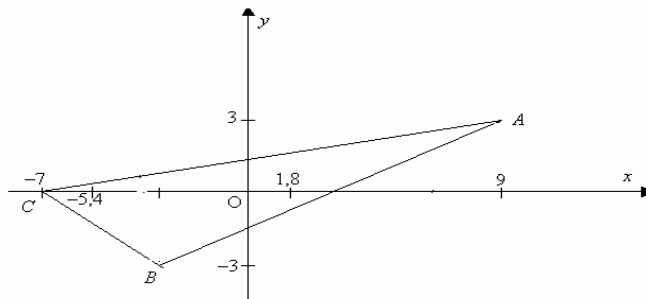
откуда $K(2,4; 4,8)$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad |CK| &= \sqrt{0,6^2 + 1,2^2} = 0,6\sqrt{5}; \quad |AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{и} \\ S &= \frac{1}{2} |CK| \cdot |AB| = \frac{0,6 \cdot 5}{2} = \frac{3}{2} \text{ ед}^2. \end{aligned}$$

Пример 4. В треугольнике с вершинами $A(9; 3)$, $B(-3; -3)$ и $C(-7; 0)$ найти (используя уравнение прямой с угловым коэффициентом) величину каждого внутреннего угла треугольника и длины всех его сторон.

Решение:

1.



2. Запишем уравнение стороны AB :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}; \quad \frac{x - 9}{-3 - 9} = \frac{y - 3}{-3 - 3}; \quad x - 3 = 2y;$$

$$AB: \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \quad k_{AC} = \frac{1}{2}.$$

3. Запишем уравнение стороны BC :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}; \quad \frac{x + 3}{-7 + 3} = \frac{y + 3}{0 + 3}; \quad -3x - 21 = 4y;$$

$$BC: \quad y = -\frac{3}{4}x - \frac{21}{4}, \quad k_{BC} = -\frac{3}{4}.$$

4. Найдем $\angle CBA$:

$$\operatorname{tg}(\angle CBA) = \operatorname{tg} \angle(\overline{BC} \wedge \overline{AB}) = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AB}} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = -2.$$

Знак «минус» показывает, что $\angle CBA$ тупой, в чем убеждаемся из чертежа: $\angle CBA = \operatorname{arctg}(-2) \approx 116,6^\circ$.

5. Найдем $\angle ACB$:

$$\operatorname{tg}(\angle ACB) = \operatorname{tg} \angle(\overline{BC} \wedge \overline{AC}) = \frac{k_{AC} - k_{BC}}{1 + k_{AC} \cdot k_{BC}} = \frac{\frac{3}{16} + \frac{3}{4}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{16}} = \frac{12}{11}.$$

$$\angle ACB = \operatorname{arctg}\left(\frac{12}{11}\right) \approx 47,5^\circ.$$

6. Найдем $\angle CAB$:

$$\operatorname{tg}(\angle CAB) = \operatorname{tg} \angle(\overline{AC} \wedge \overline{AB}) = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{\frac{3}{16} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16}} = \frac{2}{7}.$$

$$\angle CAB = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{7}\right) \approx 15,9^\circ.$$

7. Для контроля найдем сумму углов треугольника:

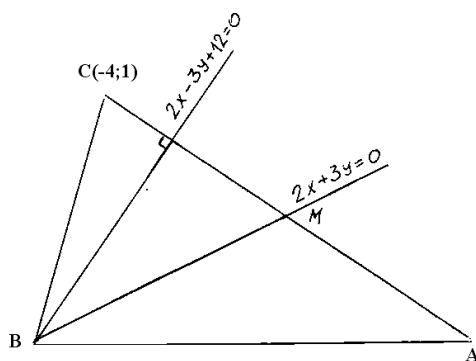
$$\angle CBA + \angle ACB + \angle CAB \approx 116,6^\circ + 47,5^\circ + 15,9^\circ = 180^\circ.$$

Пример 5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $C(4; -1)$, а также уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенной из другой вершины.

Решение:

1. Найдем уравнение стороны AC :

$\overline{AC} \perp (2x - 3y + 12 = 0)$, поэтому вектор нормали $\vec{n} \{2; -3\}$, и уравнение прямой AB имеет вид $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-3}$, откуда $-3x + 12 = 2y + 2$, или окончательно, $3x + 2y - 10 = 0$.



2. Найдем координаты точки M – середины отрезка AC :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0, \\ 2x + 3y = 0, \end{cases} \text{ откуда } M(6; -4).$$

3. Найдем координаты точки A как точки, удаленной в два раза дальше от точки C , чем точки M : $x_M = \frac{x_C + x_A}{2}$, откуда $x_A = 2x_M - x_C = 12 - 4 = 8$; $y_M = \frac{y_C + y_A}{2}$ и $y_A = 2y_M - y_C = -8 - (-1) = -7$.
 Итак, $A(8; -7)$.

4. Найдем координаты точки B :
$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0, \\ 2x + 3y = 0, \end{cases} \text{ откуда } 4x = -12, \text{ и } B(-3; 2).$$

5. Найдем уравнение прямой BC : $\frac{x+3}{4+3} = \frac{y-2}{-1-2}$, откуда $3x + 7y - 5 = 0$.

6. Найдем уравнение прямой AB : $\frac{x+3}{8+3} = \frac{y-2}{-7-2}$, откуда $9x + 11y + 5 = 0$.

Пример 6. В прямоугольном треугольнике известны уравнения гипотенузы $x - 3y + 7 = 0$ и катета $x + y - 9 = 0$. Найти уравнение второго катета, если известны координаты середины гипотенузы $(2; 3)$. Сделать чертеж.

Решение:

Найдем координаты точки B пересечения катета BC и гипотенузы AB , для чего решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0, \\ x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 16, \\ x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow B(5; 4).$$

Зная координаты точки B и середины гипотенузы D , найдем координаты другого конца гипотенузы (точки A) с помощью формул середины отрезка:

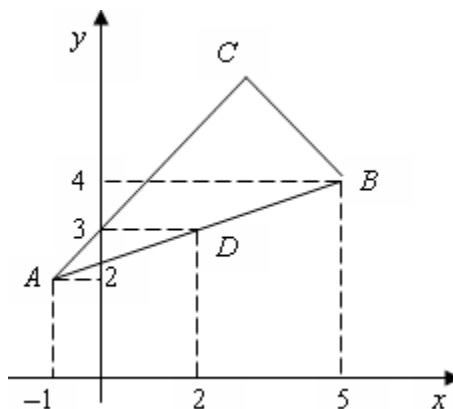
$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Отсюда, $x_A = 2x_D - x_B = 4 - 5 = -1$, $y_A = 2y_D - y_B = 6 - 4 = 2$, следовательно, $A(-1; 2)$.

Катет AC проходит через точку $A(-1; 2)$ и перпендикулярен катету BC . Из уравнения $x + y - 9 = 0$ катета BC имеем координаты нормального вектора прямой BC : $\vec{n} = (1; 1)$, который является направляющим вектором прямой AC . Следовательно, можно записать каноническое уравнение катета AC :

$$\frac{x + 1}{1} = \frac{y - 2}{1}.$$

Отсюда $x - y + 3 = 0$ — уравнение катета AC .



Задачи для самостоятельной работы

1. Даны две вершины треугольника $M_1(-10; 2)$ и $M_2(6; 4)$; его высоты пересекаются в точке $N(5; 2)$. Определить координаты третьей вершины M_3 .
2. В треугольнике ABC даны:
 - а) уравнение стороны AB : $5x - 3y + 2 = 0$;
 - б) уравнения высоты AN : $4x - 3y + 1 = 0$
и высоты BN : $7x + 2y - 22 = 0$.
 Составить уравнения двух других сторон и третьей высоты этого треугольника.
3. Составить уравнения сторон треугольника ABC , если даны одна из его вершин $A(1; 3)$ и уравнения двух медиан:

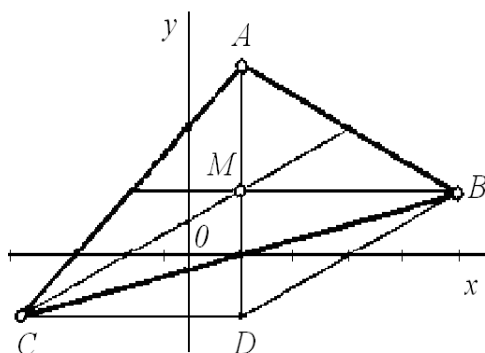
$$x - 2y + 1 = 0 \text{ и } y - 1 = 0.$$
4. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $B(-4; -5)$ и уравнения двух высот:

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ и } 3x + 8y + 13 = 0.$$
5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; 6)$, а также уравнения высоты $x - 7y + 15 = 0$ и биссектрисы $7x + y + 5 = 0$, проведенных из одной вершины.
6. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -1)$, а также уравнения высоты $3x - 4y + 27 = 0$ и биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$, проведенных из различных вершин.

Ответы:

1. $M_3(6; -6)$.
2. BC : $3x + 4y - 22 = 0$; CA : $2x - 7y - 5 = 0$; CN : $3x + 5y - 23 = 0$.
3. $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$.

Примечание. Задача может быть решена по следующей схеме:



1. Устанавливаем, что вершина A не лежит ни на одной из данных прямых.
2. Находим точку пересечения медиан и обозначаем ее какой-нибудь буквой, например M . Зная вершину A и точку M , мы можем составить уравнение третьей медианы.

3. На прямой, проходящей через точки A и M , строим отрезок $MD = AM$. Затем определяем координаты точки D , зная точку M – середину отрезка AD и один из его концов A .

4. Устанавливаем, что четырехугольник $BDCM$ – параллелограмм (его диагонали взаимно делятся пополам), составляем уравнения прямых DB и DC .

5. Вычисляем координаты точек B и C .

6. Зная координаты всех вершин треугольника, мы можем составить уравнения его сторон.

4. $3x - 5y - 13 = 0$; $8x - 3y + 17 = 0$; $5x + 2y - 1 = 0$.

5. $4x - 3y + 10 = 0$; $7x + y - 20 = 0$; $3x + 4y - 5 = 0$.

6. $4x + 7y - 1 = 0$; $y - 3 = 0$; $4x + 3y - 5 = 0$.

Домашнее задание

Выполните задания 3–6 из прил. 1.

5. ПЛОСКИЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

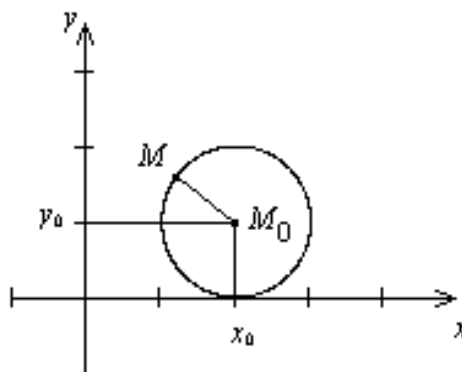
Определение. *Кривыми второго порядка* называются плоские линии, определяемые в прямоугольной декартовой системе координат Oxy уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A, B, C \neq 0$.

5.1. Окружность

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой *центром* окружности.



Окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет следующее уравнение:

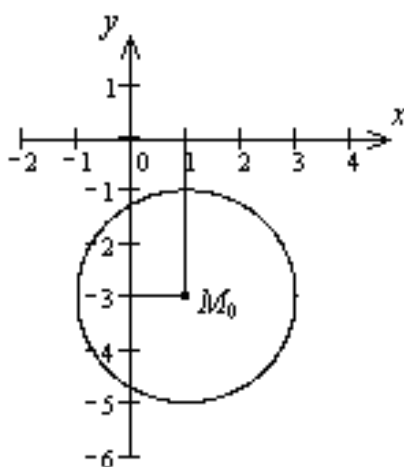
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Пример. Построить кривую $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

Решение:

Выделяя полные квадраты, получим

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 6 = 0$ или $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$, т. е. уравнение окружности с центром в точке $M_0(1; -3)$ и радиусом $r = 2$.

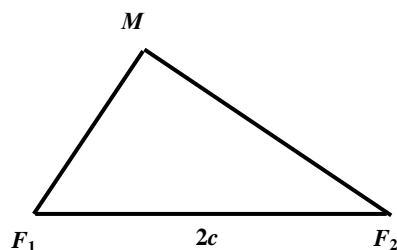


5.2. Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

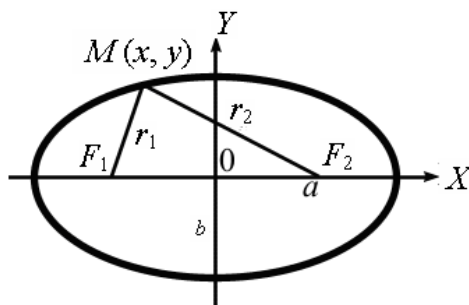
5.2.1. Уравнение эллипса

Пусть M – любая точка плоскости, F_1 и F_2 – заданные точки (фокусы).



Определение эллипса выражается формулой $MF_1 + MF_2 = 2a$. Обозначим расстояние $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$) как *фокусное расстояние*. Тогда из треугольника ΔMF_1F_2 получим $2c < 2a$, откуда $c < a$.

Выведем уравнение эллипса. Для начала рассмотрим систему координат Oxy .



Во введенной системе координат фокусы расположены на оси Ox и имеют координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу.

Тогда $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$:

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Перенеся первый радикал из левой части в правую и возведя в квадрат, имеем

$$4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (x-c)^2 + y^2,$$

или

$$4a^2 + x^2 + 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Приводя подобные члены, получим, что $4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Затем (после деления на 4) снова возведем в квадрат:

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2).$$

Последнее уравнение можно упростить, если раскрыть скобки и привести подобные члены:

$$\begin{aligned} a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \\ -(a^2 - c^2)x^2 &= -a^2(a^2 - c^2) + a^2y^2. \end{aligned}$$

Поскольку из определения эллипса следует, что $a > c$, то число $a^2 - c^2 > 0$ и можно обозначить $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Тогда уравнение запишется: $-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2$ или $a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$.

Разделив это уравнение на $a^2b^2 > 0$, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b^2 = a^2 - c^2.$$

Такое уравнение эллипса называется *каноническим*.

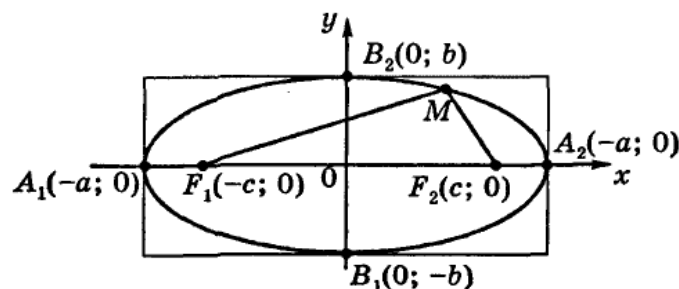
5.2.2. Форма эллипса

Исследуем форму эллипса. Если в уравнении эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ заменить x на $(-x)$, то оно не изменится. Это означает, что если точка $M(x, y)$ принадлежит кривой, то точка $M_1(-x, y)$ также принадлежит этой кривой, т. е. кривая симметрична относительно оси ординат. Эллипс симметричен и относительно оси абсцисс, потому что его уравнение не меняется при замене y на $(-y)$.

Таким образом, эллипс симметричен относительно точки O — центра эллипса. Учитывая это, достаточно изучить форму эллипса только в первой четверти, т. е. для $x, y \geq 0$.

При $x, y \geq 0$ из канонического уравнения можно получить уравнение кривой в явном виде, т. е. $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $(0 \leq x \leq a)$. Из этого уравнения ясно, что кривая проходит через точки, $B(0; b)$ и $A(a; 0)$. Эти точки называются *вершинами эллипса*.

Из явного уравнения эллипса ясно, что ордината y при непрерывном возрастании x на отрезке $[0; a]$ монотонно убывает. Построим по явному уравнению часть эллипса в первой четверти. В остальных четвертях кривая строится с учетом симметрии относительно координатных осей.



Числа a и b называются *полуосями эллипса*. При этом a называется большой полуосью, а b – малой полуосью эллипса.

При $a = b$ эллипс представляет собой окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

5.2.3. Характеристики эллипса

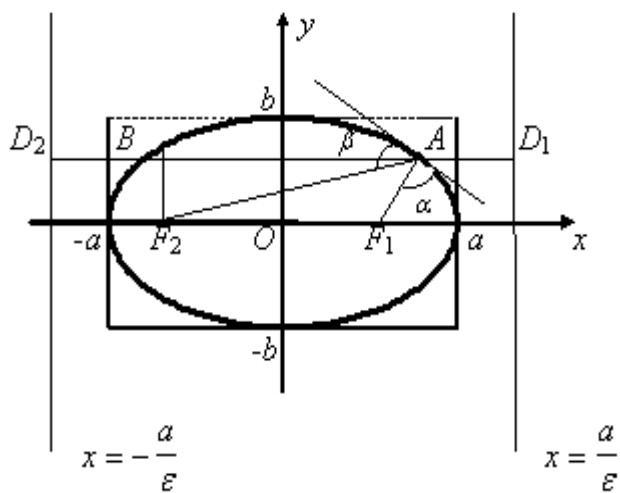
Определение. *Эксцентриситетом эллипса называется число*

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Поскольку из определения эллипса следует, что $c > a > 0$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Эксцентриситет ε эллипса характеризует степень вытянутости эллипса. Чем ближе эксцентриситет к нулю, тем больше эллипс похож на окружность. Чем ближе эксцентриситет к 1, тем сильнее вытянут эллипс.

Определение. *Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса, расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются директрисами эллипса.*



Пример. Составить уравнение эллипса при следующих условиях и найти недостающие параметры: $c = 2$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Решение:

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$a = \frac{c}{\varepsilon} = 3$ – большая полуось;

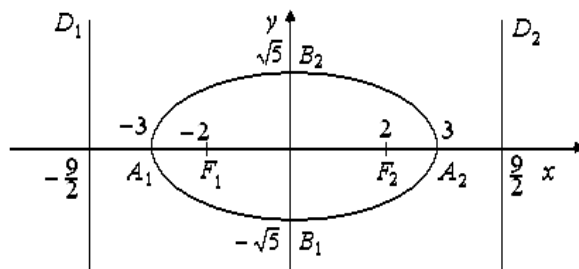
$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5}$ – малая полуось;

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ – каноническое уравнение искомого эллипса;

$F_1 (-2; 0)$, $F_2 (2; 0)$ – фокусы эллипса;

$A_1 (-3; 0)$, $A_2 (3; 0)$, $B_1 (0; -\sqrt{5})$, $B_2 (0; \sqrt{5})$ – вершины эллипса;

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{9}{2}$ – уравнение директрис эллипса.



5.2.4. Свойства эллипса

Фокальное свойство эллипса: эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов, постоянна и равна $2a$.

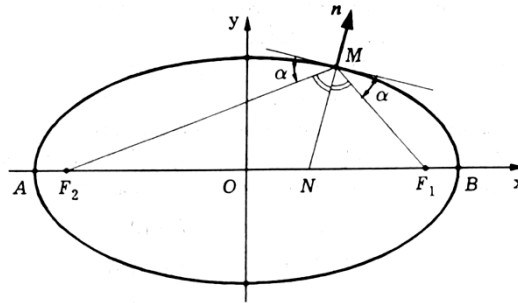
Директориальное свойство эллипса: отношение расстояния от любой точки эллипса до его фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса:

$$\frac{AF_1}{AD_1} \equiv \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Оптическое свойство эллипса: касательная в любой точке эллипса образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы эллипса, M – произвольная точка на эллипсе. Тогда нормаль (перпендикуляр к касательной) к эллипсу в точке M делит угол F_1MF_2 пополам.

Данное свойство имеет достаточно простой физический смысл. Если из одного фокуса выходит в плоскости эллипса луч света, то, отразившись от самого эллипса, он обязательно пройдет через другой фокус. Возьмем поверхность, образованную вращением эллипса вокруг большой оси, и будем считать, что внутри она зеркальная. В один из фокусов поместим источник света. Тогда все лучи, выходящие из источника, отражаясь от поверхности, пройдут через другой фокус, т. е. освещенность в обоих фокусах будет одинаковой.



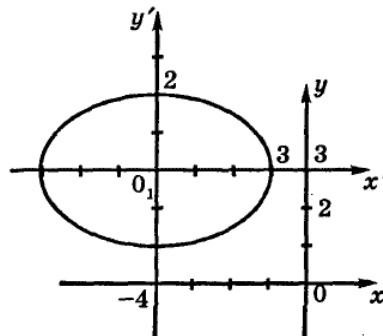
Аналогичное явление происходит и при отражении звука. На этом последнем свойстве было основано устройство «галерей шепота»: два человека, стоящих в фокусах эллиптической галереи, могли переговариваться вполголоса, тогда как остальные посетители галереи их не слышали.

5.2.5. Различные положения эллипса

Уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$ имеет вид

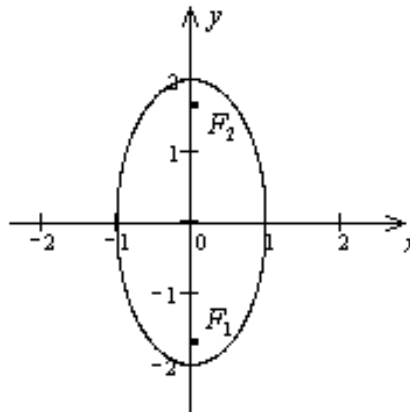
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Так, например, эллипс $\frac{(x + 4)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$ имеет вид



Если в уравнении $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $b > a$, то большая ось и фокусы этого эллипса лежат на оси Oy , а малая ось – на оси Ox . Для такого эллипса $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Например, эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ имеет следующий вид:

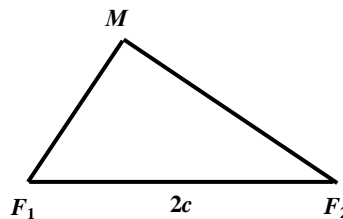


5.3. Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний от двух заданных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

5.3.1. Уравнение гиперболы

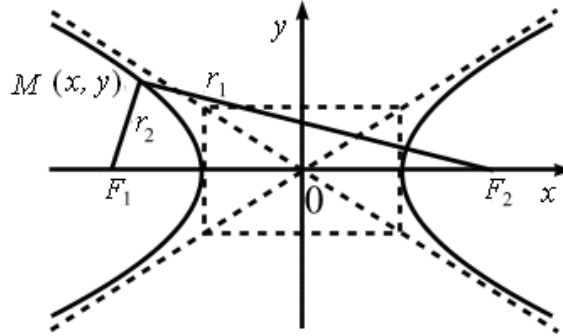
Пусть M – любая точка плоскости, F_1 и F_2 – заданные точки (фокусы).



Определение эллипса выражается формулой $MF_2 - MF_1 = 2a$.

Обозначим расстояние $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$) – *фокусное расстояние*. Тогда из треугольника ΔMF_1F_2 получим $2c > 2a$, откуда $c > a$. Выведем уравнение эллипса. Рассмотрим систему координат Oxy .

Во введенной системе координат Oxy фокусы имеют координаты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.



Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то по ее определению $|F_1M - F_2M| = 2a$, где $a > 0$.

Подставив в равенство $|F_1M - F_2M| = 2a$ координаты точек M, F_1, F_2 , получим

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \text{ или}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2,$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Последнее уравнение разделим на 4 и снова возведем в квадрат:

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2).$$

Раскрыв скобки и произведя упрощения, получим уравнение

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

в котором $c^2 - a^2 > 0$, поскольку $c > a$.

Из этого следует, что можно ввести обозначение $b^2 = c^2 - a^2$ и записать уравнение гиперболы в виде $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$. Разделив на $a^2 b^2 > 0$, получим уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Такое уравнение гиперболы называется *каноническим*.

5.3.2. Форма гиперболы

Исследуем форму гиперболы на плоскости. Из вида уравнения ясно, что гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy .

При $x = 0$ получим уравнение $-\frac{y^2}{b^2} = 1$, которое не имеет вещественных корней. Следовательно, кривая не пересекает ось Oy .

При $y = 0$ получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} = 1$, корни которого $x = \pm a$. Следовательно, кривая пересекает ось Ox в точках $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$. Эти точки называются *вершинами гиперболы*.

Числа a и b называются *полуосями гиперболы*, при этом a — действительной полуосью, а b — мнимой полуосью.

Для части гиперболы, находящейся в первой четверти, явное уравнение имеет следующий вид:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad (a \leq x < \infty),$$

из которого видно, что y принимает вещественные значения при $|x| \geq a$. Следовательно, нет точек кривой, расположенных в полосе $|x| \leq a$.

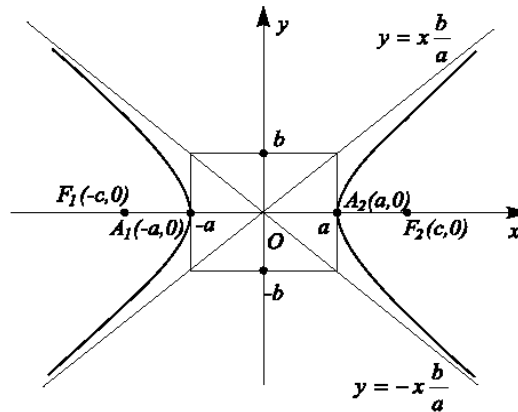
Преобразуем явное уравнение гиперболы:

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + x - x \right) = \frac{b}{a} x + \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \\ &= \frac{b}{a} x + \frac{b}{a} \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} x + \frac{b}{a} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}. \end{aligned}$$

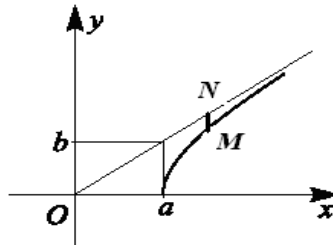
Отсюда следует, что

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.$$

Прямоугольник $A_1B_1A_2B_2$ с центром в точке O и сторонами $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называют *осевым прямоугольником* гиперболы.



Построим диагонали осевого прямоугольника. Их уравнение $y_{1,2} = \pm \frac{b}{a}x$.



Найдем разность ординат точки M гиперболы и точки N диагонали, лежащие в первой четверти:

$$MN = |y - y_1| = \left| \frac{b}{a}x - \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} - \frac{b}{a}x \right| = \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.$$

Последняя дробь стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, т. е. $MN \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

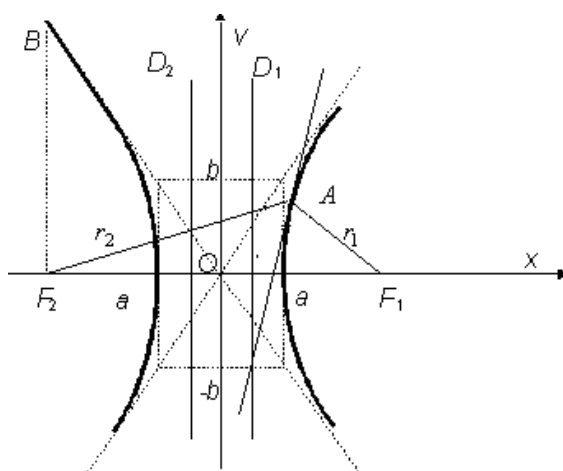
Следовательно, гипербола приближается к диагоналям. Прямые $y_{1,2} = \pm \frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы.

5.3.3. Характеристики гиперболы

Определение. **Эксцентриситетом** гиперболы называется число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.

Так как у гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$.

Определение. **Директрисами** гиперболы называются прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и отстоящие от центра гиперболы на расстояние $\pm \frac{a}{\varepsilon}$.



Директрисы гиперболы расположены симметрично между центром и вершинами гиперболы (т. к. эксцентриситет $\varepsilon > 1$ и $\frac{a}{\varepsilon} < a$).

Пример. Составить уравнение гиперболы при следующих условиях и найти недостающие параметры: $b = 3$, $c = 4$.

Решение:

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ – действительная полуось гиперболы;

$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ – уравнение искомой гиперболы;

$F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$ – фокусы гиперболы;

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{7}}$ – эксцентриситет гиперболы;

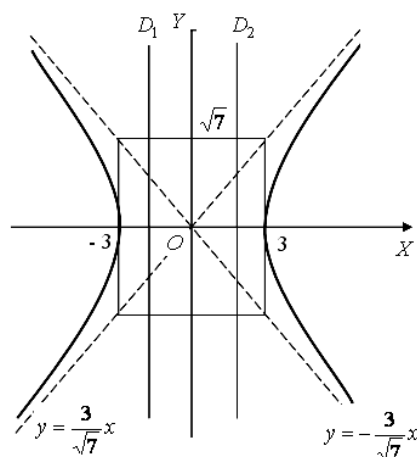
$A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$ – вершины гиперболы;

$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}x$ – асимптоты гиперболы;

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{7}{4}$ – уравнение директрис гиперболы.

Строить гиперболу советуем следующим образом:

1. Отметить на координатных осях полуоси гиперболы $\sqrt{7}$ и 3.
2. Провести через эти точки прямые, параллельные осям.
3. Провести диагонали полученного прямоугольника. Эти диагонали являются асимптотами гиперболы.
4. Построить гиперболу, проводя ее через вершины A_1 и A_2 так, чтобы ветви приближались к асимптотам при $x \rightarrow \pm\infty$.



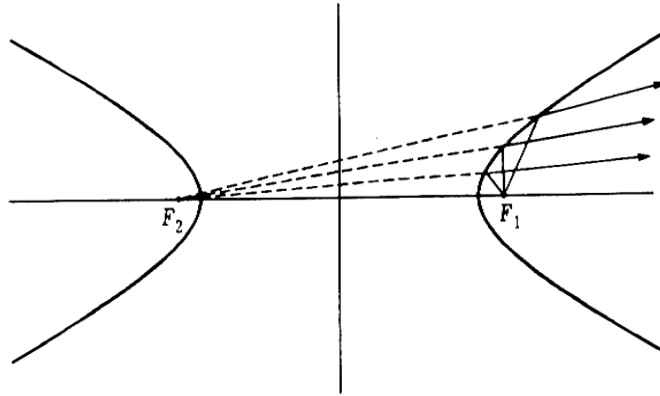
5.3.4. Свойства гиперболы

Фокальное свойство гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух фокусов постоянна и равна $2a$.

Директориальное свойство гиперболы: отношение расстояния от любой точки гиперболы до его фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса:

$$\frac{AF_1}{AD_1} \equiv \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Оптическое свойство гиперболы: касательная в любой точке гиперболы образует с фокальными радиусами точки касания равные углы (изображение точечного источника света, расположенного в одном из фокусов, есть мнимое и находится в другом фокусе гиперболы).

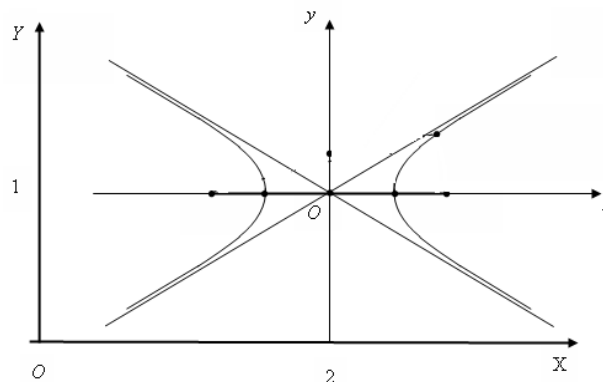


5.3.5. Различные положения гиперболы

Уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Так, например, гипербола $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ имеет вид

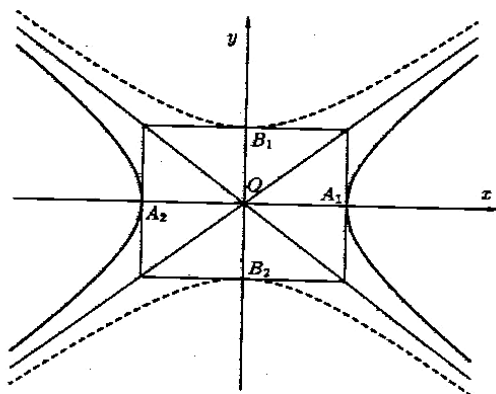


Уравнение гиперболы, ветви которой направлены вдоль оси Oy , имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Такая гипербола называется *сопряженной*. Для такой гиперболы действительная ось $2b$ располагается на оси OY , а мнимая ось $2a$ – на оси OX .

Очевидно, что сопряженные гиперболы имеют общие асимптоты.



Пример. Построить кривую, заданную уравнением $y^2 - x^2 = 4$.

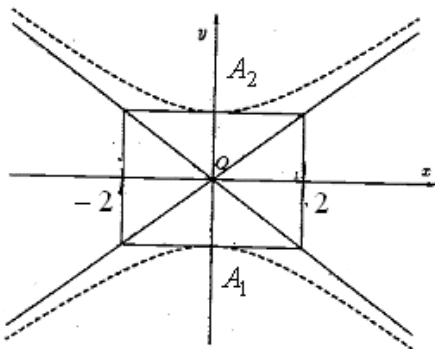
Решение:

Разделив каждое слагаемое заданного уравнения на 4, запишем его в виде $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$. Это уравнение задает на плоскости гиперболу с полуосями $a = b = 2$. Гипербола с равными полуосями называется *равнобочной*, ее асимптотами являются биссектрисы координатных углов $y = \pm x$.

При $y = 0$ получим уравнение $-\frac{x^2}{4} = 1$, не имеющее вещественных корней, т. е. гипербола не пересекает ось Ox .

При $x = 0$ получим уравнение $\frac{y^2}{4} = 1$, имеющее корни $y = \pm 2$. Следовательно, вершины гиперболы $A_1(0; -2)$, $A_2(0; 2)$ лежат на оси Oy .

Фокусы гиперболы расположены на той же оси, на которой находятся ее вершины. Из того, что $c^2 = a^2 + b^2 = 8$ и $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, следует: координаты фокусов равны $F_1(0; -2\sqrt{2})$ и $F_2(0; 2\sqrt{2})$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

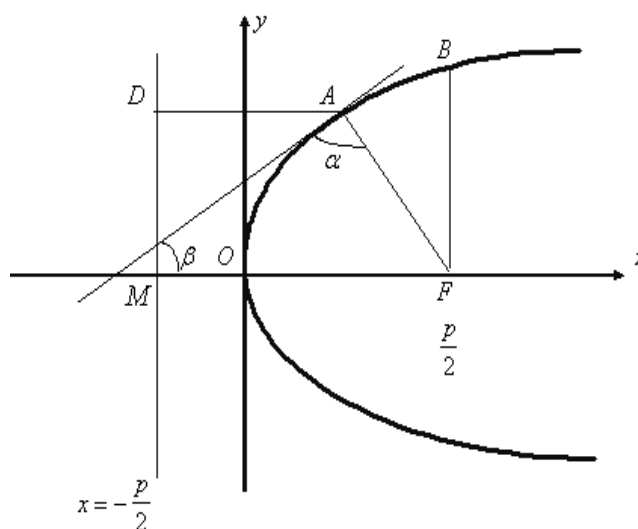


5.4. Парабола

Определение. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой *фокусом*, и прямой, называемой *директрисой*.

5.4.1. Уравнение параболы

Пусть точка $A(x, y)$ – точка параболы, точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус параболы, а прямая l – ее директриса. Пусть также задано расстояние между ними, равное p (т. е. $MF = p > 0$), ось Oy – посередине MF , то определение параболы имеет вид $AD = AF$.



Найдем расстояния AD и AF . Поскольку $AD = x + \frac{p}{2}$ и $AF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, то получим равенство $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.

Возводя обе части в квадрат и приводя подобные члены, будем иметь уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Такое уравнение параболы называется *каноническим*.

5.4.2. Форма и характеристики параболы

Исследуем форму параболы.

Из уравнения параболы видно, что кривая симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат.

Для ее ветви в верхней полуплоскости при $y \geq 0$, уравнение относительно y :

$$y = \sqrt{2px} \quad (0 \leq x < \infty),$$

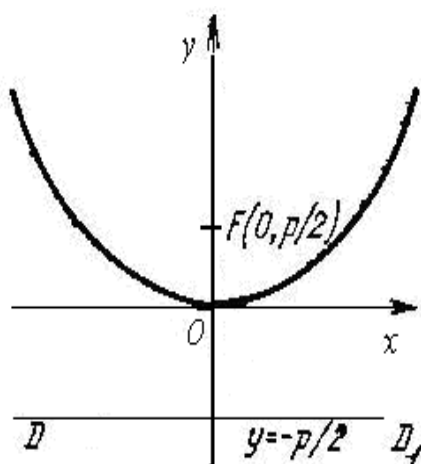
из которого следует, что когда x возрастает на полуинтервале $[0, +\infty)$, ордината y возрастает от 0 до $+\infty$.

При $y \leq 0$ ветвь гиперболы симметрична относительно оси Ox . Точка $O(0; 0)$ называется *вершиной* параболы. Парабола не имеет асимптот. Эксцентриситет параболы равен 1.

Если осью симметрии параболы служит ось ординат, то уравнение параболы имеет вид

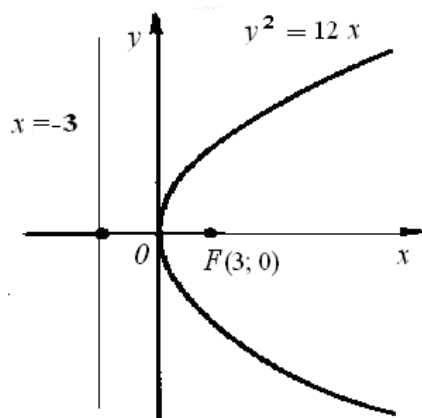
$$x^2 = 2py \quad (p > 0).$$

Уравнение директрисы в данном случае $y = -\frac{p}{2}$, фокус $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$.



Пример. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат при условии $F(3; 0)$ и найти уравнение директрисы.

Решение:



Фокус параболы лежит на положительной полуоси OX , следовательно, уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$.

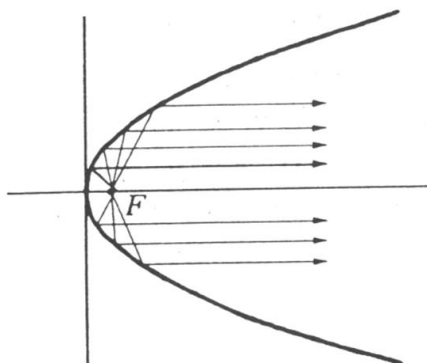
Так как координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то $\frac{p}{2} = 3$, откуда $p = 6$.

Искомое уравнение параболы $y^2 = 12x$. Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$; $x = -3$.

5.4.3. Свойства параболы

Директориальное свойство параболы: парабола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и равно единице.

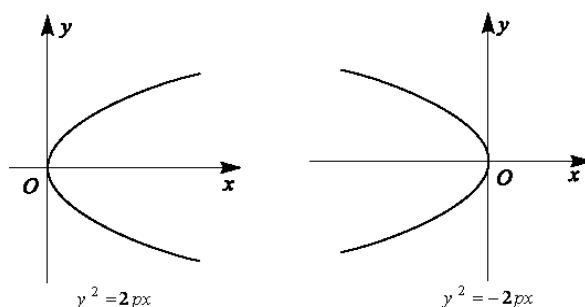
Оптическое свойство параболы: касательная в любой точке параболы образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и положительным направлением оси абсцисс.



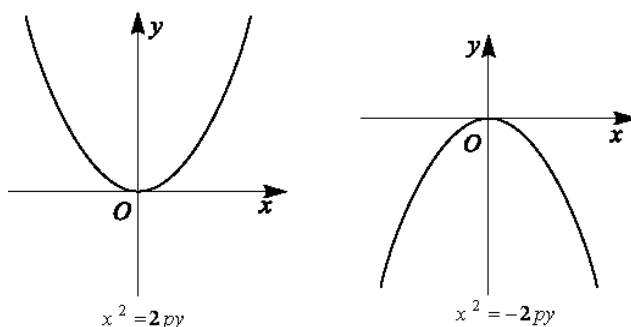
Это свойство означает, что луч света, вышедший из фокуса F , отразившись от параболы, дальше пойдет параллельно оси этой параболы. И наоборот, все лучи, приходящие из бесконечности и параллельные оси параболы, сойдутся в ее фокусе. Это свойство широко используется в технике. В прожекторах обычно ставят зеркало, поверхность которого получается при вращении параболы вокруг ее оси симметрии (параболическое зеркало). Источник света в прожекторах помещают в фокусе параболы. В результате прожектор дает пучок почти параллельных лучей света. Это же свойство используется и в приемных антеннах космической связи и в зеркалах телескопов, которые собирают поток параллельных лучей радиоволн или поток параллельных лучей света и концентрируют его в фокусе зеркала.

5.4.4. Различные положения параболы

Уравнение параболы с вершиной в точке $O(0;0)$: $y^2 = \pm 2px$, если ось симметрии параллельна Ox .



$x^2 = \pm 2py$, если ось симметрии параллельна Oy .



Знак « \pm » показывает направление ветвей параболы. Если в уравнении знак « $+$ », то направление ветвей совпадает с направлением оси, которой параллельна ось симметрии параболы.

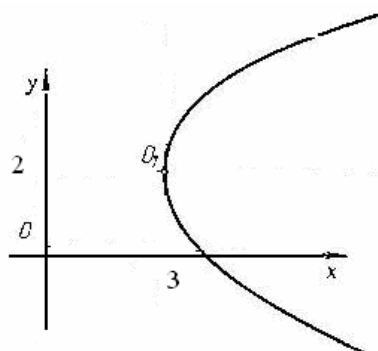
Если в уравнении знак « $-$ », то направление ветвей противоположно направлению оси, которой параллельна ось симметрии параболы.

Уравнение параболы с вершиной в точке $O'(x_0, y_0)$:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0), \text{ ось симметрии параллельна } Ox;$$

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0), \text{ ось симметрии параллельна } Oy.$$

Так, например, на рисунке изображена парабола $(y - 2)^2 = 4(x - 3)$.



Вопросы для самопроверки

1. Что называется кривой второго порядка?
2. Выведите уравнение окружности радиуса R с центром в точке (a, b) .
3. Дайте определение эллипса, гиперболы, параболы.
4. Выведите каноническое уравнение эллипса, гиперболы, параболы.
5. Покажите, что окружность является частным случаем эллипса.
6. Что называется вершинами эллипса? Каковы их координаты?
7. Что называется большой и малой осями (полуосями) эллипса?
8. Дайте определение фокусов эллипса.
9. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы? Как он характеризует форму эллипса и гиперболы?
10. Что называется директрисами эллипса и гиперболы? Каковы их свойства?
11. Какие прямые называются асимптотами гиперболы?
12. Дайте определение равносторонней гиперболы.
13. Что называется параметром параболы? Как, зная параметр параболы, определить ее фокус и директрису?
14. Как характеризует форму параболы ее параметр?
15. Чем отличаются эксцентриситеты эллипса, гиперболы и параболы?
16. Какие примеры использования кривых второго порядка вы знаете?

Практическая часть 3
Кривые второго порядка

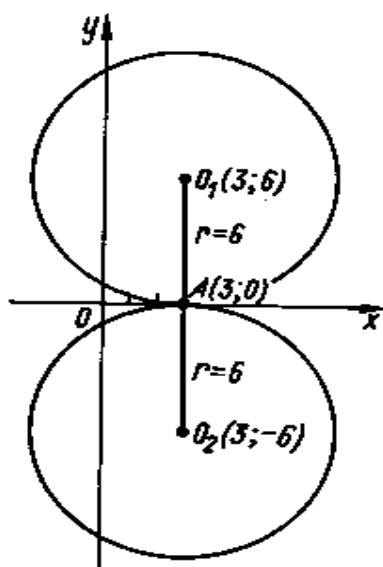
Пример 1. Написать уравнение окружности с центром в точке $A(-1; 2)$ и радиуса $R = 2$. Лежит ли точка $O(0; 0)$ на этой окружности?

Решение:

Уравнение окружности с центром в точке A имеет вид $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, и точка O не лежит на ней, т. к. ее координаты не удовлетворяют уравнению окружности: $(0-1)^2 + (0+2)^2 \neq 4$.

Пример 2. Написать уравнение окружности, касающейся оси абсцисс в точке $A(3; 0)$ и имеющей радиус, равный 6.

Решение:



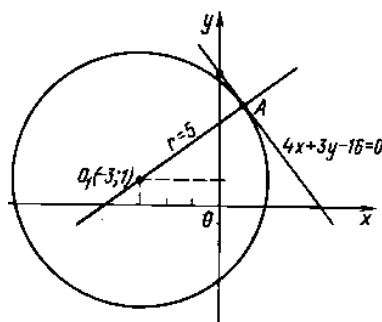
Пусть $O_1(3; b)$ – центр окружности (абсцисса центра окружности равна абсциссе точки касания и по условию равна 3). Найдем ординату центра окружности: $(3-3)^2 + (0-b)^2 = 6^2$, откуда $b = \pm 6$, т. е. имеется два центра $O_1(3; 6)$ и $O_2(3; -6)$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две окружности: $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 36$ и $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 36$.

Пример 3. Центр окружности находится в точке $O_1(-3; 1)$. Написать уравнение окружности, если она касается прямой $4x + 3y - 16 = 0$.

Решение:

Так как угловой коэффициент касательной $k_1 = -\frac{4}{3}$, то угловой коэффициент прямой O_1A , перпендикулярной касательной, равен $k_2 = \frac{3}{4}$. Поэтому уравнение прямой O_1A имеет вид $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 3)$ или $3x - 4y + 13 = 0$.



Координаты точки A найдем как координаты точки пересечения двух прямых: $\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0, \\ 4x + 3y - 16 = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \end{cases}$ т. е. $A(1; 4)$.

Радиус окружности $R = O_1A = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (1 - 4)^2} = 5$, и искомое уравнение окружности имеет вид

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Пример 4. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки: $A(4; 1)$, $B(-3; -6)$, $C(5; 0)$.

Решение:

Уравнение окружности, проходящей через точки $A(4; 1)$, $B(-3; -6)$, $C(5; 0)$ будем искать в виде

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

Так как точки A , B , C принадлежат искомой окружности, то подставляя в это уравнение их координаты, получим систему трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} 16 + 1 + 4m + n + p = 0, \\ 9 + 36 - 3m - 6n + p = 0, \\ 25 + 5m + p = 0, \end{cases}$$

решив которое, получим $m = -2$, $n = 6$, $p = -15$.

Тогда уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0.$$

Для нахождения радиуса и центра окружности приведем полученное уравнение к каноническому виду:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Пример 5. Написать уравнения касательных к окружности $(x + 1)^2 + y^2 = 20$, проведенных из точки $A(1; 6)$.

Решение:

Точка A не принадлежит окружности, т. к. $1 + 36 + 2 - 19 = 20 > 0$. Уравнения касательных будем искать в виде $y = kx + b$, причем, зная, что точка $A(1; 6)$ лежит на касательной, имеем $6 = k + b$, т. е. $b = 6 - k$.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} y = kx + 6 - k, \\ (x + 1)^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

определим общие точки прямой и окружности, для чего y из первого уравнения подставим во второе и получим

$$x^2(1 + k^2) + x(2 + 12k - 2k^2) + (37 + k^2 - 12k) = 0.$$

Так как прямая касается окружности, то это уравнение имеет единственное решение, следовательно, дискриминант равен нулю, т. е.

$$(2 + 12k - 2k^2)^2 - 4(1 + k^2)(37 + k^2 - 12k) = 0,$$

откуда $k_1 = -2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, и тогда $b_1 = 8$, $b_2 = \frac{11}{2}$.

Таким образом, $y = -2x + 8$ и $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ и есть искомые уравнения касательных.

Пример 6. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3; 2)$ и $N(3\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

Решение:

Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как точки M и N лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют его уравнению

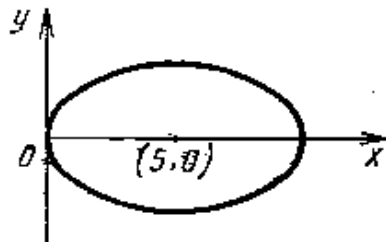
$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1; \\ \frac{27}{2a^2} + \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения $\frac{2}{b^2} = 1 - \frac{27}{2a^2}$, т. е. $\frac{4}{b^2} = 2 - \frac{54}{a^2}$, и подстановка в первое уравнение дает следующий результат: $\frac{9}{a^2} + 2 - \frac{54}{a^2} = 1$, откуда $a^2 = 45$, $b^2 = 5$.

Искомое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример 7. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр симметрии его находится в точке $(5; 0)$. Составить уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.

Решение:



По условию $a = 5$, и уравнение такого эллипса имеет вид

$$\frac{(x-5)^2}{25^2} + \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1.$$

Осталось найти b : $b^2 = a^2 - c^2$.

Значение c определим из формулы эксцентриситета: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, откуда $c = \varepsilon a = 3$.

Следовательно, $b^2 = a^2 - c^2 = 16$, $b = 4$, и искомое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Пример 8. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение:

1. Найдем координаты нижней вершины: $x=0$, откуда $y^2=16$, и $y=-4$, т. к. нам необходимы координаты *нижней* вершины.

2. Найдем координаты левого фокуса:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = 3, \quad F_2(-3; 0).$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \quad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \quad 4x = -3y - 12; \quad 4x + 3y + 12 = 0.$$

Пример 9. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

Решение:

Каноническое уравнение данного эллипса: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$.

1. Найдем координаты верхней вершины: $x=0$, откуда $y^2=1$, и $y=1$, т. к. нам необходимы координаты *верхней* вершины, т. е. центр окружности находится в точке $A(0; 1)$.

2. Найдем координаты фокусов: $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$, $c = \sqrt{3}$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$, $F_2(-\sqrt{3}; 0)$.

3. Радиус R искомой окружности вычисляем по формуле расстояния между фокусом и центром окружности:

$$R = |AF_2| = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

4. Записываем искомое уравнение окружности:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \quad \text{или} \quad x^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

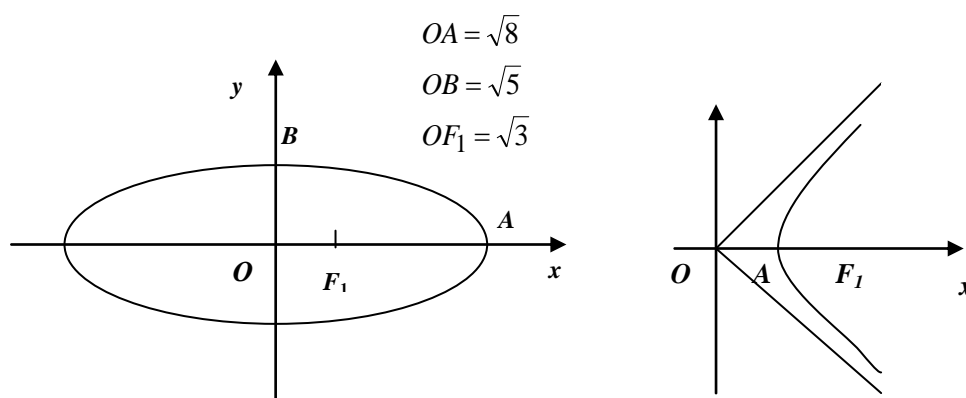
Пример 10. Составить уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Решение:

Для эллипса: $a = \sqrt{8}$; $b = \sqrt{5}$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$; $F(\sqrt{3}; 0)$.

Для гиперболы: $a = \sqrt{3}$; $b = \sqrt{5}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8}$; $F(\sqrt{8}; 0)$.

Уравнение искомой гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.



Пример 11. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение:

Для эллипса:

$$a_{\text{э}} = 5; \quad b_{\text{э}} = 3; \quad c_{\text{э}} = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4; \quad F_{\text{э}} (4; 0).$$

Для гиперболы по условию также $c_{\text{г}} = c_{\text{э}} = 4$. Тогда с учетом $c_{\text{г}} = \varepsilon a_{\text{г}}$ имеем по условию задачи $c_{\text{г}} = 2a_{\text{г}}$, откуда $a_{\text{г}} = 2$. Но $4 \equiv c_{\text{г}} = \sqrt{a_{\text{г}}^2 + b_{\text{г}}^2}$, откуда $b_{\text{г}} = \sqrt{12}$.

Искомое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

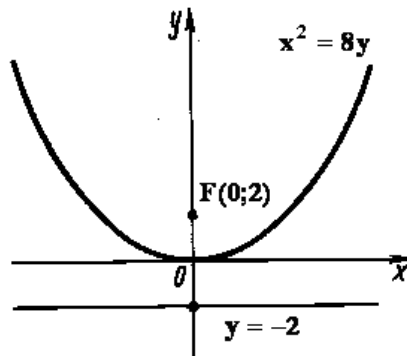
Пример 12. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат при следующих условиях и найти недостающие параметры (уравнения директрис, фокусы):

1) парабола симметрична относительно оси OY и проходит через точку $A (4; 2)$;

2) парабола симметрична относительно оси OX и проходит через точку $A (-3; -\sqrt{6})$.

Решение:

1. Парабола симметрична относительно оси OY , ветви ее направлены вверх, следовательно, ее уравнение имеет вид $x^2 = 2py$.



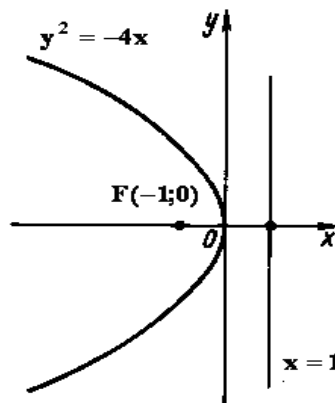
Подставив в это уравнение координаты точки $A(4; 2)$, находим $16 = 2 \cdot 2p$, откуда $p = 4$.

Искомое уравнение параболы: $x^2 = 8y$.

Уравнение директрисы: $y = -\frac{p}{2}$; $y = -2$.

Фокус: $F(0; \frac{p}{2})$, т. е. $F(0; 2)$.

2. Парабола симметрична относительно оси OX и проходит через точку $A(-3; -2\sqrt{3})$.



Парабола симметрична относительно оси OX , ветви ее направлены влево, следовательно, ее уравнение имеет вид $y^2 = -2px$. Подставив в это уравнение координаты точки A , находим $12 = -2 \cdot 3p$, откуда $p = 2$.

Искомое уравнение параболы: $y^2 = -4x$.

Уравнение директрисы: $x = \frac{p}{2}$; $x = 1$.

Фокус: $F(-\frac{p}{2}; 0)$, т. е. $F(-1; 0)$.

Пример 13. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от фокуса параболы равно 20.

Решение:

Из канонического уравнения параболы получим, что параметр параболы равен 4. Следовательно, фокус параболы совпадает с точкой $F(2; 0)$.

Пусть искомая точка M параболы имеет координаты x и y . Тогда по условию задачи имеем

$$(x - 2)^2 + y^2 = 400.$$

Итак, искомые точки есть точки пересечения полученной окружности и данной параболы. Решая совместно уравнение окружности с уравнением параболы, получим квадратное уравнение относительно x :

$$x^2 + 4x - 396 = 0.$$

Корни уравнения равны $x_1 = 18$, $x_2 = -22$. Очевидно, что второй корень не подходит, т. к. должно быть $x \geq 0$. Подставляя значение первого корня в уравнение параболы, получим уравнение $y^2 = 144$, откуда $y_1 = 12$, $y_2 = -12$.

Таким образом, искомые точки, лежащие на параболе, имеют координаты $(18; 12)$, $(18; -12)$.

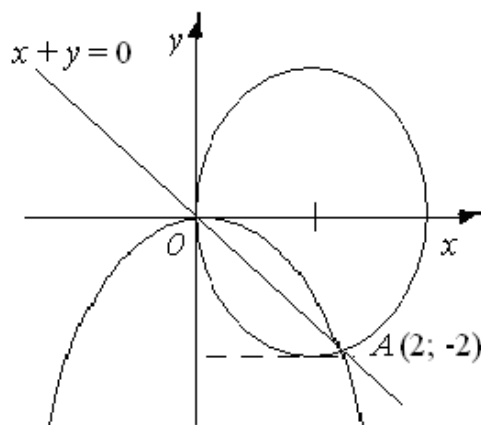
Пример 14. Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ и симметрична относительно оси OY .

Решение:

Найдем точки пересечения прямой и окружности:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ 2x(x - 2) = 0, \end{cases}$$

откуда точки пересечения имеют координаты $O(0; 0)$ и точка $A(2; -2)$.



Так как парабола проходит через $O(0; 0)$ и симметрична относительно оси OY , то ее уравнение имеет вид $x^2 = 2py$. Подставляя координаты точки A , находим параметр p : $4 = 2(-2)p$, откуда $p = -1$.

Итак, уравнение параболы – $x^2 = -2y$, уравнение директрисы – $y = \frac{1}{2}$.

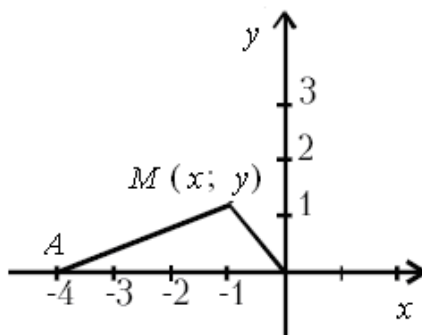
Пример 15. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4; 0)$ втрое дальше, чем от начала координат.

Решение:

Расстояние между двумя точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ определяется формулой $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомой линии, тогда

$$AM = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2}, \quad MO = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

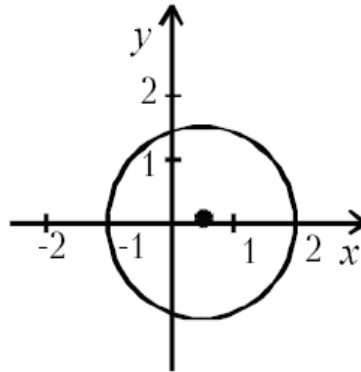


По условию $AM = 3MO$, т. е. $AM = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, откуда $(x + 4)^2 + y^2 = 9(x^2 + y^2)$ или $x^2 - x + y^2 - 2 = 0$.

Приведем полученное уравнение к каноническому виду:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

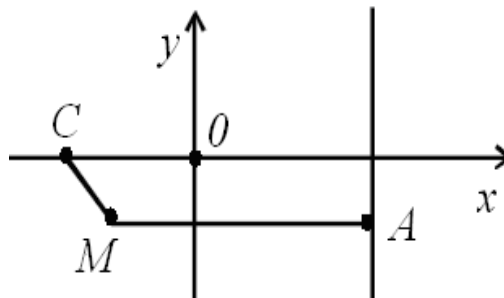
Это уравнение окружности радиуса $r = \frac{3}{2}$ с центром в точке $O\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.



Пример 16. Найти уравнение и построить траекторию точки M , которая движется так, что ее расстояние от точки $C(-1; 0)$ остается вдвое меньше расстояния от прямой $x = 2$.

Решение:

Расстояние между двумя точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ определяется формулой $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомой линии, тогда

$$CM = \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} \quad \sqrt{(x+1)^2 + y^2};$$

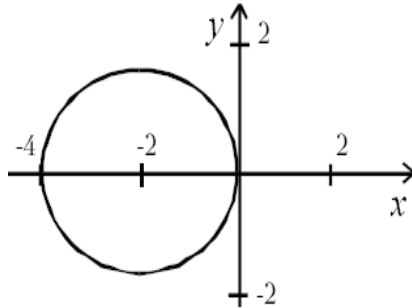
$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + (y-y)^2} = |x-2|.$$

По условию $AM = 2CM$, т. е. $|2-x| = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, откуда $(2-x)^2 = 4(x+1)^2 + 4y^2$ или $3x^2 + 12x + 4y^2 - 12 = 0$.

Приведем полученное уравнение к каноническому виду:

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Это уравнение эллипса с центром в точке $O(-2; 0)$ и полуосями 2 и $\sqrt{3}$.

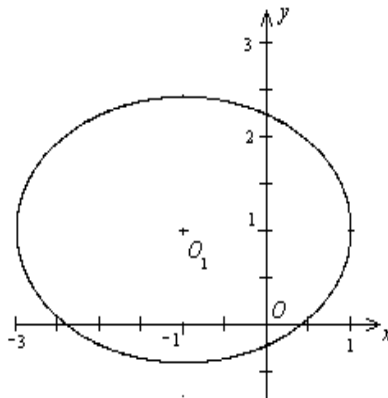


Пример 17. Построить кривую $x = -1 - \sqrt{2 - 2y^2 + 4y}$.

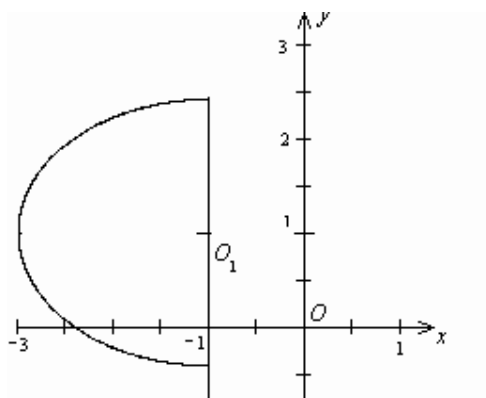
Решение:

Так как $\sqrt{2 - 2y^2 + 4y} \geq 0$, то накладываемые ограничения на переменную x : $x \leq -1$. Преобразуем уравнение: $-(x+1) = \sqrt{2 - 2y^2 + 4y}$. Возведем обе части в квадрат: $(x+1)^2 = 2 - 2y^2 + 4y$. При этом появились новые точки, которые удовлетворяют последнему уравнению, но не удовлетворяют исходному уравнению. Эти посторонние точки мы отбросим позднее.

Выделим полный квадрат по переменному y : $(x+1)^2 = 2 - 2(y^2 - 2y + 1) + 2$, $(x+1)^2 + 2(y-1)^2 = 4$, и окончательно: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса с полуосями 2 и $\sqrt{2}$.



С учетом ограничения на переменную x , от нарисованного выше эллипса нужно оставить только левую половину.



Последний рисунок и является ответом к задаче.

Задачи для самостоятельной работы

1. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1; -1)$ и точки пересечения двух окружностей:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0, \quad x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0.$$
2. Из точки $A(4; 2)$ проведены касательные к окружности $x^2 + y^2 = 10$. Определить угол, образованный этими касательными.
3. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2 + 5y^2 = 1$, две другие совпадают с концами его малой оси.
4. Точка $C(-3; 2)$ является центром эллипса, касающегося обеих координатных осей. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.
5. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 2$, центр ее лежит в начале координат, один из фокусов $F(12; 0)$. Вычислить расстояние от точки M_1 гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей заданному фокусу.
6. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.
7. Дана вершина параболы $A(6; -3)$ и уравнение ее директрисы $3x - 5y + 1 = 0$. Найти фокус F этой параболы.
8. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2 = 8x$ и параллельна прямой $2x + 2y - 3 = 0$.
9. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:
 а) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$; б) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$; в) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$;
 г) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$; д) $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$; е) $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$.
 Изобразить эти линии на чертеже.

Ответы:

1. $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$.

2. 90° .

3. $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ кв. ед.

4. $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

5. 10.

6. $(-6; 4\sqrt{3})$ и $(-6; -4\sqrt{3})$.

7. $F(9; -8)$.

8. $x + y + 2 = 0$.

9. а) половина эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, расположенная в нижней полуплоскости (рис. 1);

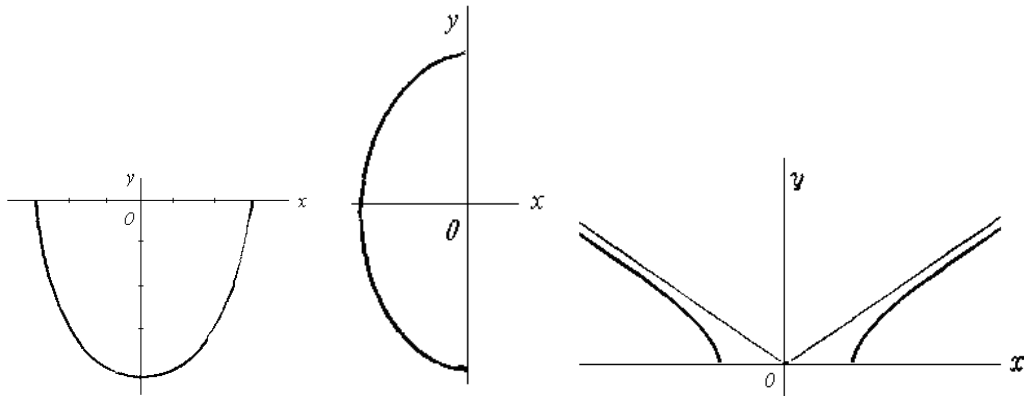
б) половина эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, расположенная в левой полуплоскости (рис. 2);

в) часть гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, расположенная в верхней полуплоскости (рис. 3);

г) ветвь гиперболы $x^2 - \frac{y^2}{9} = -1$, расположенная в нижней полуплоскости (рис. 4);

д) часть параболы $(y-3)^2 = 16(x-1)$, расположенная под прямой $y-3=0$ (рис. 5);

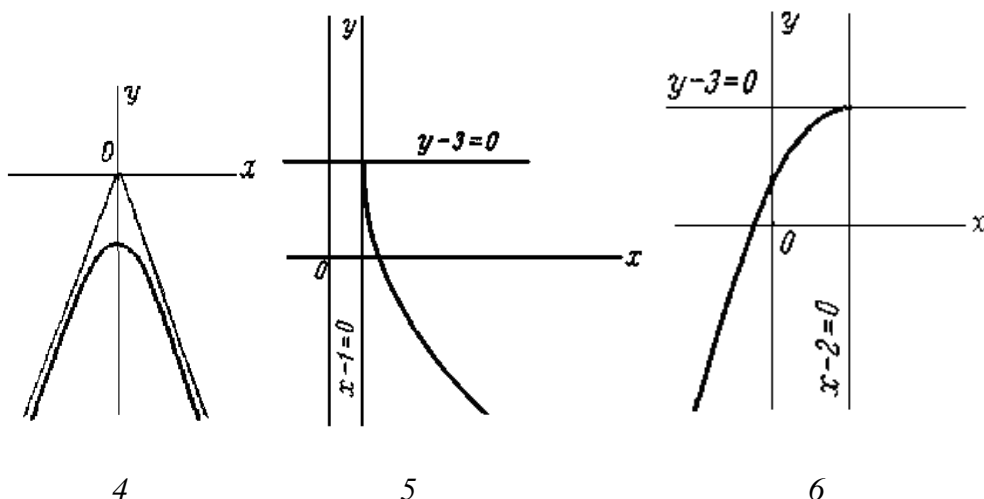
е) часть параболы $(x-2)^2 = -2(y-3)$, расположенная влево от прямой $x-2=0$ (рис. 6).



1

2

3



Тестовые задания 2

Кривые второго порядка

1. Геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от данной точки и прямой, является:

- а) эллипс; б) гипербола; в) парабола; г) окружность.

2. Прямые, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы, называются:

- а) директрисами; б) трактрисами; в) асимптотами; г) предельными.

3. Количество осей симметрии у эллипса, гиперболы и параболы соответственно равно:

- а) 2, 2, 2; б) 2, 2, 1; в) 2, 1, 2; г) 1, 2, 2.

4. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

- а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;
 в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; г) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5. Каноническое уравнение параболы имеет вид:

- а) $y^2 = px$; б) $y^2 = x^2$; в) $y^2 = 2px^2$; г) $y^2 = 2px$.

6. Каноническое уравнение окружности имеет вид:

- а) $x^2 + y^2 + R^2 = 0$; б) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = (R - c)^2$;
в) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$; г) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

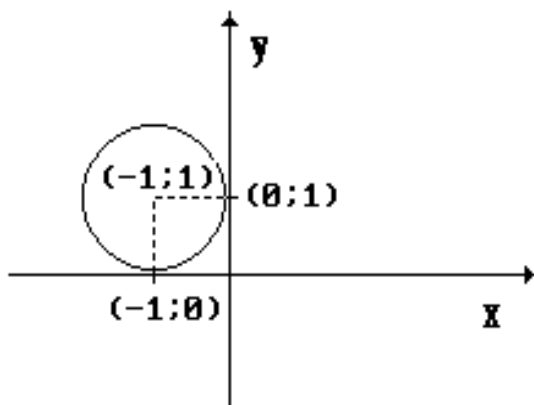
7. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

- а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

8. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 8y = 0$, равен:

- а) -4 ; б) 4 ; в) 16 ; г) 8 .

9. Каноническое уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид:



- а) $x^2 + (y + 1)^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$;
в) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$; г) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

10. Уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ представляет собой:

- а) эллипс; б) гиперболу; в) параболу; г) окружность.

11. Кривая второго порядка $x^2 + y = 4$ представляет собой:

- а) эллипс; б) гиперболу; в) параболу; г) окружность.

12. Для эллипса $9x^2 + 4y^2 = 36$ длины осей (a, b) равны:

а) (4, 9); б) (9, 4); в) (2, 3); г) (36, 0).

13. Отметьте номер уравнения, являющегося уравнением эллипса:

а) $\frac{x}{9} + \frac{y}{4} = 1$; б) $x^2 - y^2 = 1$; в) $x^2 + y^2 = 1$; г) $x^2 + 4y^2 = 4$.

14. Если уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, то длина его меньшей полуоси равна:

а) 3; б) 4; в) 2; г) 9.

15. Расстояние от фокуса эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ до ближней вершины равно:

а) 2; б) 4; в) 1; г) 8.

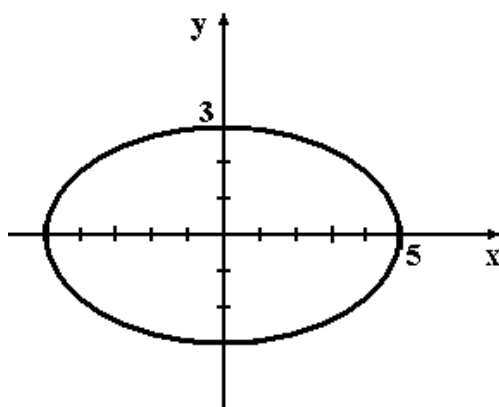
16. Фокусы эллипса лежат в точках $(-4; 0)$ и $(4; 0)$; одна из вершин – в точке $(0; -3)$. Выберите верный ответ:

- а) его уравнение: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$;
б) большая полуось равна 7;
в) эксцентриситет $\varepsilon = 0,9$;
г) одна из вершин – в точке $(-5; 0)$.

17. Для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a < b$) укажите верное утверждение:

- а) $0 < \varepsilon = \frac{c}{b} < 1$; б) $c^2 = a^2 - b^2$;
в) директриса $x = -\frac{\varepsilon}{d}$; г) асимптота $y = \frac{b}{a}x$.

18. Уравнение эллипса, изображенного на рисунке, имеет вид:



а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1;$

б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1;$

в) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1;$

г) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

19. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox , симметрично относительно начала координат, если большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

а) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1;$ б) $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{8} = 1;$ в) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{8} = 1;$

г) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{64} = 1.$

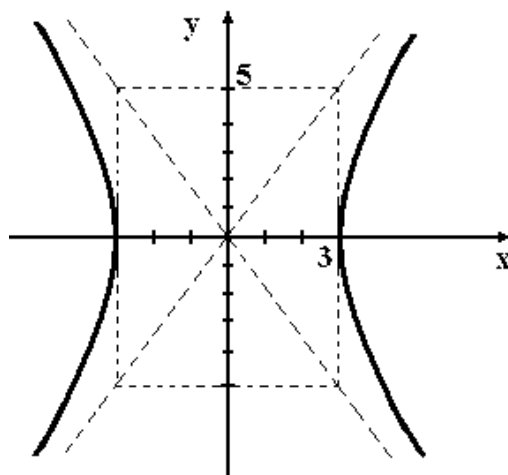
20. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, то длина ее действительной полуоси равна:

а) 3; б) 4; в) 9; г) 16.

21. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = -1$, то длина ее действительной полуоси равна:

а) 25; б) 2; в) 4; г) 5.

22. Уравнение гиперболы, изображенной на рисунке, имеет вид:



а) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1;$

б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1;$

в) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1;$

г) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$

23. Для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ укажите неверное утверждение:

а) асимптота $y = -\frac{a}{b}x;$

б) директриса $y = \frac{a}{\varepsilon};$

в) $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1;$

г) $c^2 = a^2 + b^2.$

24. Эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ равен:

а) $\frac{16}{9};$

б) $\frac{9}{16};$

в) $\frac{5}{4};$

г) $\frac{4}{3}.$

25. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если уравнения асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ и расстояния между вершинами равно 48:

а) $-\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{576} = 1;$

б) $-\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1;$

в) $-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{36} = 1;$

г) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1.$

26. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно Ox и ее параметр $p = 3$:

- а) $y^2 = 4x$; б) $y^2 = 8x$; в) $y^2 = 6x$; г) $y^2 = 3x$.

27. Для параболы $y^2 = 2p(x - x_0)$ укажите верное утверждение:

- а) вершина $O(0, 0)$; б) директриса $y = x_0 + \frac{p}{2}$;
в) фокус $F\left(\frac{p}{2} + x_0, 0\right)$; г) эксцентриситет $\varepsilon = x_0 + 1$.

28. Для параболы $x^2 = 2p(y - y_0)$ укажите верное утверждение:

- а) вершина $O(0, y_0)$; б) директриса $x = y_0 - \frac{p}{2}$;
в) фокус $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$; г) эксцентриситет $\varepsilon = x_0 + 1$.

29. Привести уравнение к каноническому виду $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 22 = 0$ и определить вид кривой:

- а) гипербола; б) окружность; в) эллипс; г) парабола.

30. По какой кривой второго порядка движутся планеты Солнечной системы:

- а) гипербола; б) парабола; в) эллипс.

31. По какой кривой второго порядка движется артиллерийский снаряд:

- а) гипербола; б) парабола; в) эллипс.

32. Какая из данных кривых является замкнутой:

- а) гипербола; б) парабола; в) эллипс.

Домашнее задание

Выполните задания 7–12 из прил. 1.

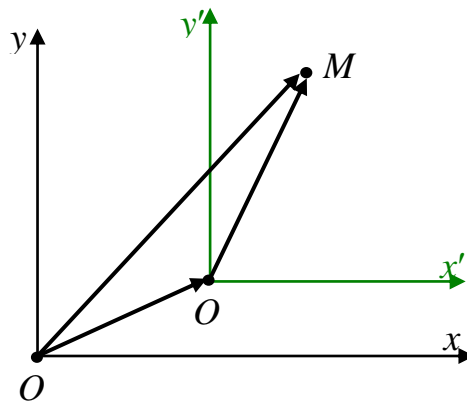
6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Любое преобразование координат на плоскости (кроме зеркального отображения) можно свести к двум последовательным преобразованиям: параллельный перенос осей координат и поворот осей на заданный угол.

6.1. Параллельный перенос системы координат

Пусть на плоскости заданы две декартовы системы координат Oxy и $O'x'y'$, у которых направления координатных осей совпадают, но начальные точки O и O' разные. Говорим, что *вторая система координат получена из первой переносом начала координат в точку O'* .

Пусть нам известны координаты точки O' относительно первой системы координат: $O'(a, b)$. Пусть M – произвольная точка на плоскости, (x, y) – ее координаты относительно первой системы координат, (x', y') – относительно второй. Найдем связь между этими координатами.



По определению, координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора. Поэтому $\vec{OO'}(a, b)$, $\vec{OM}(x, y)$, $\vec{O'M}(x', y')$.

По правилу треугольника сложения векторов $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$.

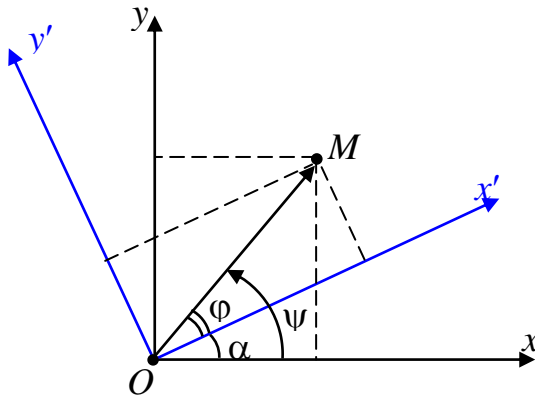
$$\text{Отсюда} \quad \begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}$$

Аналогично, если в пространстве мы совершим перенос начала координат в точку $O'(a, b, c)$, то к полученным формулам только добавятся равенства $z' = z + c$ и $z = z' + c$.

6.2. Поворот системы координат

Пусть теперь на плоскости заданы две декартовы системы координат с общим началом Oxy и $Ox'y'$. Пусть α – ориентированный угол между положительными направлениями осей Ox и Ox' , тогда говорим, что *вторая СК получена из первой поворотом на угол α* .

Пусть M – произвольная точка на плоскости, (x, y) – ее координаты относительно первой системы координат, (x', y') – относительно второй.



Найдем связь между этими координатами. Пусть φ – ориентированный угол между положительным направлением оси Ox и вектором \vec{OM} , а ψ – между Ox' и \vec{OM} . Тогда $\varphi = \psi + \alpha$. Обозначим $r = |\vec{OM}|$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \text{откуда } \begin{cases} x' = r \cos \psi, \\ y' = r \sin \psi. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} x = r \cos (\psi + \alpha) = r \cos \psi \cdot \cos \alpha - r \sin \psi \cdot \sin \alpha = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha, \\ y = r \sin (\psi + \alpha) = r \cos \psi \cdot \sin \alpha + r \sin \psi \cdot \cos \alpha = y' \cdot \sin \alpha + x' \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

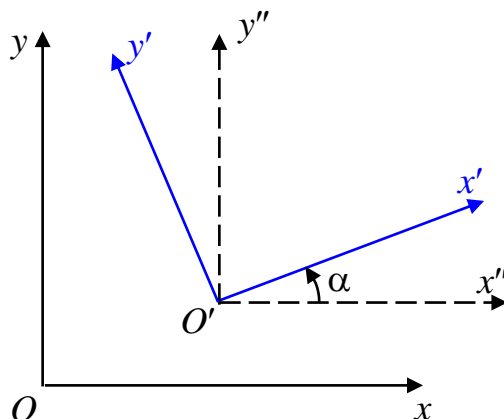
Поскольку вторая система координат может быть получена из первой поворотом на угол $-\alpha$, то с учетом $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$,

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, получаем

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

Если в пространстве совершается поворот системы координат вокруг оси Oz , то координата z точки M не изменится, а x и y будут изменяться по установленным выше формулам.

Допустим, теперь на плоскости заданы две совершенно произвольные декартовы системы Oxy и $O'x'y'$. Тогда вторую систему координат можно получить из первой в результате двух преобразований: сначала мы совершаем перенос начала координат в точку O' (получим промежуточную систему координат $O'x''y''$), а затем – поворот координатных осей.



Тогда уравнения параллельного переноса имеют вид

$$\begin{cases} x'' = x - a, \\ y'' = y - b, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x'' + a, \\ y = y'' + b. \end{cases}$$

Проводя далее поворот, получим

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \alpha + y'' \sin \alpha, \\ y' = -x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x'' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y'' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Подставляя x'' и y'' из первой системы в последнюю, получаем, что

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha, \\ y' = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha. \end{cases}$$

Пример. Новая декартова система координат получена из старой переносом начала в точку $O'(2, -1)$ и поворотом на угол $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$.

а) Выпишите формулы, выражающие новые координаты через старые. Найдите новые координаты точки $A(6; 2)$.

б) Выпишите формулы, выражающие старые координаты через новые. Найдите старые координаты точки B , если в новой системе координат $B(5, 5)$.

Решение:

а) Новые координаты выражаются через старые по формулам

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha, \\ y' = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha, \end{cases}$$

где (a, b) – координаты точки O' , α – угол поворота координатных осей.

Зная $\cos \alpha$, находим $\sin \alpha$ и подставляем в формулы

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5} (x - 2) + \frac{3}{5} (y + 1), \\ y' = -\frac{3}{5} (x - 2) + \frac{4}{5} (y + 1). \end{cases}$$

Для точки $A(6, 2)_{Oxy}$ находим $x' = 5$, $y' = 0$. Значит $A(5, 0)_{O'x'y'}$.

б) Старые координаты выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b. \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} x' - \frac{3}{5} y' + 2, \\ y = \frac{3}{5} x' + \frac{4}{5} y' - 1. \end{cases}$$

Подставляя сюда координаты точки $B(5, 5)_{O'x'y'}$ находим $B(3, 6)_{Oxy}$.

7. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

7.1. Общее уравнение кривой второго порядка. Центр кривой

Напомним, что *кривой второго порядка* называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{22} отличен от нуля.

Выражение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется *квадратичной частью уравнения*, $2a_1x + 2a_2y$ — *линейной частью*, а c — *свободным членом*.

Если мы перейдем к новой системе координат $Ox'y'$, то формулы замены координат будут иметь вид

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + b_1, \\ y = \gamma x' + \delta y' + b_2. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в уравнение кривой второго порядка, получим уравнение такого же вида, т. е. содержащее x' и y' во второй степени. Поэтому наше определение корректно, т. е. не зависит от выбора системы координат.

Определение. Точка O' называется *центром кривой второго порядка*, если она является ее центром симметрии. Кривая, которая имеет центр, называется *центральной*.

Предположим, что система координат выбрана так, что ее начало находится в центре кривой. Тогда одновременно с точкой $M(x, y)$ кривой будет принадлежать и точка $M'(-x, -y)$. Подставим ее координаты в уравнение кривой второго порядка, получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_1x - 2a_2y + c = 0.$$

Разность уравнений для симметричных точек

$$4(a_1x + a_2y) = 0$$

должно выполняться для любой точки $M(x, y)$ на кривой. Отсюда в случае, если начало координат находится в центре, $a_1 = a_2 = 0$. Поэтому, если изначально начало координат не находится в центре O' , то мы совершим параллельный перенос координатных осей в центр, и уравнение кривой в новой системе координат $O'x'y'$ примет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + c' = 0, \quad (*)$$

т. е. линейная часть уравнения исчезнет.

При этом коэффициенты квадратичной части останутся прежними; это будет установлено в процессе доказательства следующей теоремы.

Теорема. Координаты (x_0, y_0) центра кривой, заданной уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0$, находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Доказательство. Введем новую декартову систему координат $O'x'y'$, которая получается из Oxy переносом начала в центр $O'(x_0, y_0)$ кривой. Подставляя формулы замены координат

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

в уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0$, получим

$$\begin{aligned} & a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + \\ & + 2a_1(x' + x_0) + 2a_2(y' + y_0) + c = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' + \\ & + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + c' = 0, \end{aligned}$$

где $c' = \varphi(x_0, y_0)$ – значение левой части уравнения кривой второго порядка в точке O' . Поскольку в новой системе координат коэффициенты при x' и y' должны быть равны нулю, то получаем доказываемые уравнения.

Упростим величину c' :

$$\begin{aligned} c' &= \varphi(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + c = \\ &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x_0 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y_0 + a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + c. \end{aligned}$$

Выражения в скобках равны нулю (в силу возможности линейного переноса), и мы имеем

$$c' = a_1x_0 + a_2y_0 + c.$$

Обозначим матрицу квадратичной части уравнения $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Эта матрица является также матрицей системы линейных уравнений (**).

Введем обозначения: $\delta = |A|$, $\delta_x = -\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\delta_y = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix}$.

Возможны три следующие случаи:

1 случай. $\delta \neq 0$. Тогда по правилу Крамера система имеет единственное решение

$$x_0 = \frac{\delta_x}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\delta_y}{\delta},$$

а кривая имеет единственный центр.

2 случай. $\delta = 0$, $\delta_x \neq 0$ и $\delta_y \neq 0$ (заметим, что в случае $\delta = 0$ определители δ_x и δ_y будут равны или не равны нулю только одновременно).

Тогда ранг расширенной матрицы системы (**) будет равен 2, $r(A) = 1$, и, согласно теореме Кронекера–Капелли, система (*) не имеет решений, а кривая не имеет центра.

3 случай. $\delta = 0$, $\delta_x = \delta_y = 0$. Тогда оба уравнения в системе (**) пропорциональны, а значит, эта система имеет бесконечное количество решений, а кривая – бесконечное количество центров.

Еще раз упростим величину c' :

$$c' = a_1 x_0 + a_2 y_0 + c.$$

С учетом введенных обозначений, имеем

$$c' = a_1 \frac{\delta_x}{\delta} + a_2 \frac{\delta_y}{\delta} + c = \frac{1}{\delta}(a_1 \delta_x + a_2 \delta_y + c) = \frac{\Delta}{\delta},$$

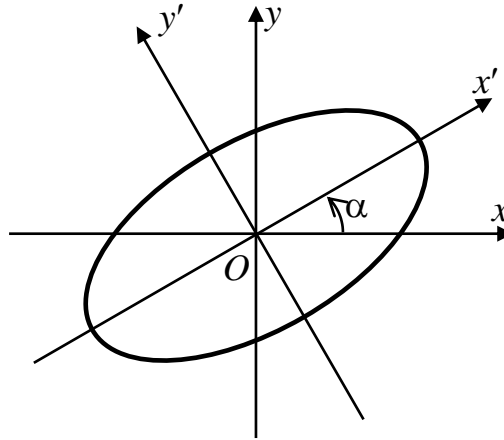
где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix}.$$

В скобках как раз стоит разложение Δ по последней строке или последнему столбцу. Последнее равенство позволяет находить c' не находя координат центра кривой.

7.2. Классификация центральных кривых второго порядка (случай $\delta \neq 0$)

Попробуем дальше упростить уравнение (*). Выберем новую декартову систему координат $O'x''y''$, которая получается из $O'x'y'$ поворотом координатных осей на некоторый угол α .



Тогда формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, \\ y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha. \end{cases}$$

Подставляя в (*), имеем

$$a_{11}(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha)^2 + 2a_{12}(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha)(x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha) + \\ + a_{22}(x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha)^2 + c' = 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные при одинаковых координатах. Тогда коэффициент $x''y''$ будет равен

$$-a_{12} \sin^2 \alpha + (a_{22} - a_{11}) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + a_{12} \cos^2 \alpha.$$

Приравняем это выражение к нулю, и получившееся уравнение разделим на $-\cos^2 \alpha$:

$$a_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha + (a_{11} - a_{22}) \operatorname{tg} \alpha + a_{12} = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестного $\operatorname{tg} \alpha$, его дискриминант

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12} \geq 0.$$

Значит, всегда существует такой угол α , что в новой системе координат мы получим уравнение кривой (*) без слагаемого, содержащего $x''y''$. В результате наше уравнение будет иметь вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad (***)$$

где λ_1 и λ_2 – некоторые коэффициенты, которые необходимо определить.

Примем без доказательства, что коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

или в развернутом виде:

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0,$$

где $s = Sp(A) = a_{11} + a_{22}$ – след матрицы A .

Оно называется *характеристическим уравнением кривой второго порядка*.

Согласно теореме Виета получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta.$$

Относительно новой системы координат $O'x''y''$ получаем

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad \delta' = |A'| = \lambda_1 \lambda_2 = \delta; \quad \delta_x = - \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\delta_y = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix}; \quad s' = Sp(A') = \lambda_1 + \lambda_2 = s;$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/\delta \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \frac{\Delta}{\delta} = \Delta.$$

Таким образом, $\delta' = \delta$, $s' = s$, $\Delta' = \Delta$, т. е. величины δ , s , Δ не изменяются при переходе к новой декартовой системе координат. Поэтому они называются *инвариантами кривой второго порядка*.

При дальнейшем упрощении уравнения (***) возможны два случая.

1 случай: $\Delta \neq 0$. Если опустить штрихи, то уравнение (***) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-\Delta/\lambda_1\delta} + \frac{y^2}{-\Delta/\lambda_2\delta} = 1.$$

Обозначим $a^2 = |\Delta/\lambda_1\delta|$, $b^2 = |\Delta/\lambda_2\delta|$.

а) $\delta > 0$, $s\Delta < 0$. Тогда $\lambda_1\lambda_2 > 0$, т. е. λ_1 и λ_2 одного знака, и $(\lambda_1 + \lambda_2)\Delta < 0$, т. е. знак Δ противоположен знаку λ_1 и λ_2 . Поэтому оба знаменателя в (17) положительны, и уравнение (15) задает эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

б) $\delta > 0$, $s\Delta > 0$. Тогда оба знаменателя отрицательны, и уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Говорят, что оно задает *мнимый эллипс*. На действительной плоскости это пустое множество.

в) $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$. Тогда λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, и поэтому знаменатели также имеют разные знаки.

Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

В любом случае получается уравнение гиперболы.

2 случай: $\Delta = 0$. В этом случае уравнение (***) принимает вид (штрихи опускаем):

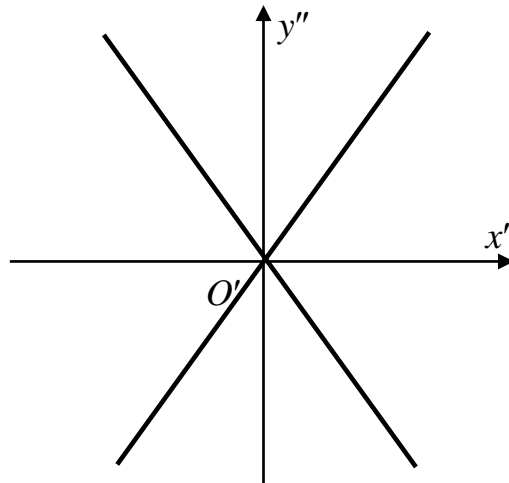
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0.$$

Обозначим $a^2 = |\lambda_1|$, $b^2 = |\lambda_2|$.

а) $\delta < 0$. Тогда λ_1 и λ_2 разного знака и последнее уравнение можно переписать в виде $a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0$, откуда

$$(ax - by)(ax + by) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют точки, для которых $ax - by = 0$ и точки для которых $ax + by = 0$. Поэтому оно определяет *пару прямых*, очевидно, *пересекающихся* в центре O' и симметричных относительно координатных осей.



б) $\delta > 0$. Тогда λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки и уравнение (***) можно переписать в виде $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$, откуда

$$(ax - iby)(ax + iby) = 0 \quad (i - \text{мнимая единица}).$$

При этом говорят, что уравнение задает *пару мнимых пересекающихся прямых*. Но пересекаются они в действительной точке O' – центре кривой.

В случае $\delta = \Delta = 0$ кривая тоже имеет центр (бесконечное количество центров), но этот случай мы рассмотрим в следующем параграфе.

Пример 1. С помощью переноса начала координат и поворота координатных осей привести уравнение кривой второго порядка $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$ к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить ее в исходной системе координат.

Решение:

Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0.$$

Если

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то кривая имеет центр $O'(x_0, y_0)$, координаты которого можно найти из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Если мы совершим параллельный перенос начала координат в точку O' , то уравнение кривой примет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + c' = 0,$$

где

$$c' = a_1x_0 + a_2y_0 + c.$$

Вычисляем

$$\delta = \begin{vmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{vmatrix} = 576 \neq 0.$$

Значит, кривая имеет центр. Найдем координаты центра (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} 25x_0 - 7y_0 + 32 = 0, \\ -7x_0 + 25y_0 - 32 = 0. \end{cases}$$

Для решения применим правило Крамера:

$$x_0 = \frac{\delta_x}{\delta}, y_0 = \frac{\delta_y}{\delta},$$

$$\delta_x = \begin{vmatrix} -32 & -7 \\ 32 & 25 \end{vmatrix} = 32 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 25 \end{vmatrix} = 32(-18) = -576.$$

$$\delta_y = \begin{vmatrix} 25 & -32 \\ -7 & 32 \end{vmatrix} = 32 \cdot \begin{vmatrix} 25 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 32 \cdot 18 = 576.$$

$$x_0 = \frac{-576}{576} = -1, \quad y_0 = \frac{576}{576} = 1.$$

Значит, центр кривой находится в точке $O'(-1, 1)$. Совершим перенос начала координат в точку O' и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$.

Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 1. \end{cases}$$

Однако делать эту подстановку в исходное уравнение кривой не следует, т. к. мы заранее из теории знаем, что получится в результате этой подстановки: линейная часть уравнения исчезнет, а c' находим по формуле

$$c' = a_1x_0 + a_2y_0 + c.$$

Имеем

$$c' = 32 \cdot (-1) - 32 \cdot 1 - 224 = -288,$$

и уравнение данной кривой второго порядка в новой системе координат:

$$25x'^2 - 14x'y' + 25y'^2 = 288.$$

Далее совершаем поворот координатных осей на угол α , тангенс которого находится по формуле

$$\begin{aligned} a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\operatorname{tg}\alpha - a_{12} &= 0, \\ -7\operatorname{tg}^2\alpha + (25 - 25)\operatorname{tg}\alpha + 7 &= 0, \\ \operatorname{tg}^2\alpha &= 1, \text{ откуда } \operatorname{tg}\alpha_1 = 1 \text{ или } \operatorname{tg}\alpha_2 = -1. \end{aligned}$$

Можем выбрать любое из них. Но, как правило, выбираем такое α , для которого $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

$$\text{Имеем: } \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получим новую систему координат $O'x''y''$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha, \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha. \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y''), \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y''). \end{cases}$$

Подставим эту замену в уравнение кривой в новой системе координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [25(x'' - y'')^2 - 14(x'' - y'')(x'' + y'') + 25(x'' + y'')^2] &= 288, \\ \frac{1}{2} [25x''^2 - 50x''y'' + 25y''^2 - 14x'' + 14y'' + 25x''^2 + 50x''y'' + 25y''^2] &= 288. \end{aligned}$$

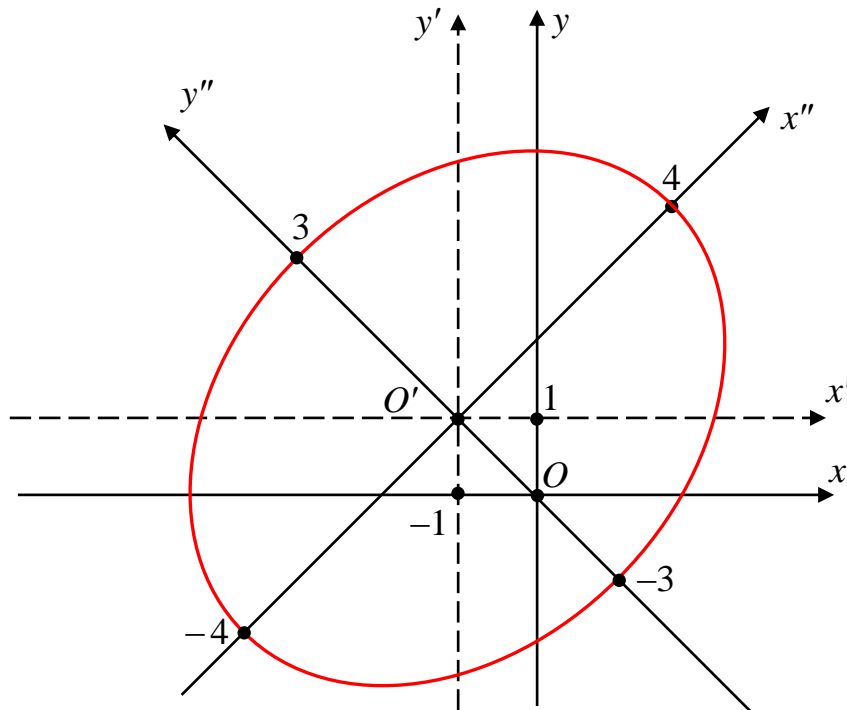
Слагаемые, содержащие произведение $x''y''$, обязательно должны сократиться. Если это не происходит, то следует искать ошибку выше.

$$\frac{1}{2} [36x''^2 + 64y''^2] = 288, \quad 9x''^2 + 16y''^2 = 144,$$

$$\frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Это уравнение задает эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 3$. Строим эллипс.

Для этого сначала строим исходную систему координат Oxy , затем в этой системе находим точку O' и строим промежуточную систему координат $O'x'y'$, которая получается из Oxy переносом начала в точку O' . Затем поворачиваем координатные оси на выбранный нами ранее угол $\alpha = 45^\circ$ и получаем окончательную систему координат $O'x''y''$. Именно на осях этой системы координат мы и откладываем полуоси эллипса.



Пример 2. С помощью переноса начала координат и поворота координатных осей привести уравнение кривой второго порядка

$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$$

к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить ее в исходной системе координат.

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 8 & -23 \end{vmatrix} = -161 - 64 = -225 \neq 0.$$

Ищем координаты центра:

$$\begin{cases} 7x_0 + 8y_0 - 7 = 0, \\ 8x_0 - 23y_0 - 8 = 0. \end{cases}$$

По правилу Крамера:

$$\delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 8 & -23 \end{vmatrix} = -161 - 64 = -225 \neq 0, \quad \delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_0 = \frac{\delta_x}{\delta} = -1, \quad y_0 = \frac{\delta_y}{\delta} = 0.$$

Значит, центр кривой находится в точке $O'(1, 0)$.

Совершаем перенос начала координат в точку O' и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$.

Формулы замены координат:

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y'. \end{cases}$$

Находим $c' = -7x_0 - 8y_0 + c = -7 - 218 = -225$. Значит в новой системе координат уравнение кривой примет вид

$$7x'^2 + 16x'y' - 23y'^2 - 225 = 0.$$

Совершаем поворот координатных осей на угол α , тангенс которого находим по формуле

$$\begin{aligned} a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\operatorname{tg}\alpha - a_{12} &= 0, \\ 8\operatorname{tg}^2\alpha + 30\operatorname{tg}\alpha - 8 &= 0, \\ 4\operatorname{tg}^2\alpha + 15\operatorname{tg}\alpha - 4 &= 0, \\ D = 225 + 64 &= 289, \\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{-15+17}{8} = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{-15-17}{8} &= -4. \end{aligned}$$

Выбираем положительный тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$.

Находим $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Получим новую систему координат $O'x''y''$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha, \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha. \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{17}} (4x'' - y''), \\ y' = \frac{1}{\sqrt{17}} (x'' + 4y''). \end{cases}$$

Подставим эту замену в уравнение кривой в новой системе координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{17} [7(4x'' - y'')^2 + 16(4x'' - y'')(x'' + 4y'') - 23(x'' + 4y'')^2] &= 225, \\ \frac{1}{17} [112x''^2 - 56x''y'' + 7y''^2 + 64x''^2 + 240x''y'' - 64y''^2 - \\ - 23x''^2 - 184x''y'' - 368y''^2] &= 225. \end{aligned}$$

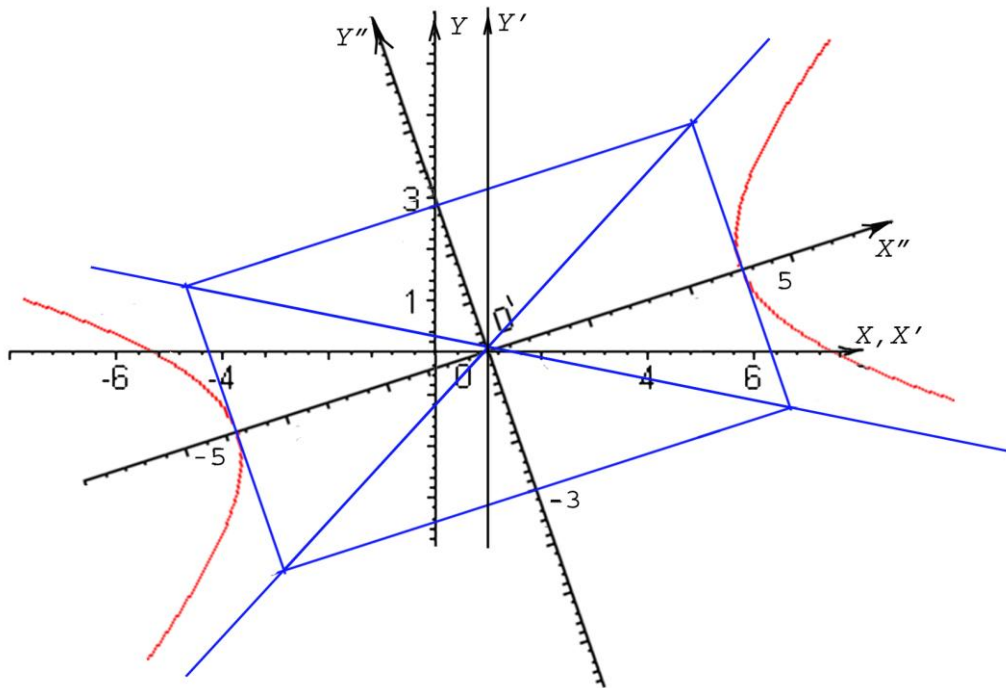
При приведении подобных, слагаемые, содержащие произведения $x''y''$, должны сократиться. Если этого не происходит, следует искать ошибку выше.

$$\begin{aligned} \frac{1}{17} [153x''^2 - 425y''^2] &= 225, \\ 9x''^2 - 25y''^2 &= 225, \\ \frac{x''^2}{25} - \frac{y''^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Получилось уравнение гиперболы с полуосями $a = 5$, $b = 3$.

Описание построения:

- 1) $O'(1, 0)$ – новое начало координат, $O'x' \parallel Ox$, $O'y' \parallel Oy$ – вспомогательные оси;
- 2) совершаем поворот координатных осей, зная что $\operatorname{tg} \alpha = 1/4$; получаем новые координатные оси $O'x''$ и $O'y''$.
- 3) в новой системе координат $O'x''y''$ строим фундаментальный прямоугольник при $a = 5$, $b = 3$;
- 4) проводим диагонали фундаментального прямоугольника, они будут являться асимптотами гиперболы;
- 5) строим гиперболу: она стремится к асимптотам, касаясь фундаментального прямоугольника.



7.3. Классификация нецентральных кривых второго порядка (случай $\delta = 0$)

Пусть теперь $\delta = 0$. Тогда мы не можем использовать процедуру нахождения центра. Поэтому совершаем поворот координатных осей на некоторый угол и получаем новую декартову систему координат с тем же началом $Ox'y'$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} \bar{x} = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ \bar{y} = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

В новой системе координат уравнение кривой не будет включать слагаемое, содержащее произведение $x'y'$:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + c = 0.$$

Заметим, что коэффициент c останется прежним, а непосредственное вычисление показывает, что

$$b_1 = a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha, \quad b_2 = a_1 \sin \alpha + a_2 \cos \alpha.$$

Числа λ_1 и λ_2 можно найти из уравнения $\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$.

Так как $\delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, то один из корней будет равен нулю. Пусть это будет λ_1 . Имеем уравнение

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + c = 0.$$

Для этого уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = -\lambda_2 b_1^2.$$

1 случай: $\Delta = 0$, откуда $b_1 = 0$.

Уравнение имеет вид

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_2 y' + c = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + c = 0.$$

Далее, обозначим $c' = (b_2^2 - \lambda_2 c) / \lambda_2$, $a^2 = |c'|$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O'(0, -b_2/\lambda_2)_{Ox'y'}$ (подчеркнем, что координаты указаны в промежуточной системе координат $Ox'y'$).

Получим уравнение

$$(y'')^2 = a^2.$$

а) $c' > 0$, откуда $(y'')^2 = a^2$, т. е. $y'' = a$ или $y'' = -a$. Наша кривая – это пара параллельных прямых.

б) $c' < 0$, откуда $(y'')^2 = -a^2$, т. е. $y'' = ia$ или $y'' = -ia$. При этом говорят, что наше уравнение задает пару мнимых параллельных прямых.

в) $c' = 0$, откуда $(y'')^2 = 0$. Говорят, что это уравнение задает пару совпадающих прямых.

2 случай: $\Delta \neq 0$, откуда и $b_1 \neq 0$. Так же, как и в предыдущем случае, выделяем в полный квадрат по y :

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + 2b_1 x' + c = 0,$$

а затем преобразуем так:

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_1}{\lambda_2} \right)^2 + 2b_1 \left(x' - \frac{b_1^2 - \lambda_2 c}{2b_1 \lambda_2} \right) = 0.$$

Обозначим $c' = \frac{b_1^2 - \lambda_2 c}{2b_1 \lambda_2}$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' - c', \\ y'' = y' + \frac{b_1}{\lambda_2}, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O' \left(c', -\frac{b_1}{\lambda_2} \right)_{Ox'y'}$.

Получим уравнение

$$\lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'' = 0 \quad \text{или} \quad (y'')^2 = 2px'',$$

где $p = -2b_1/\lambda_2$. Это уравнение задает параболу.

Пример 1. С помощью переноса начала координат и поворота координатных осей привести уравнение кривой второго порядка

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$$

к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить ее в исходной системе координат.

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

В данном случае не можем применить процедуру нахождения центра, поэтому сразу поворачиваем координатные оси:

$$-12 \operatorname{tg}^2 \alpha - 7 \operatorname{tg} \alpha + 12 = 0,$$

$$D = 49 + 576 = 625,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{7-25}{-24} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{7+25}{-24} = -\frac{4}{3}.$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}; \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 4y'). \end{cases}$$

Подставляем в первоначальное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{25} [9(4x' - 3y')^2 - 24(4x' - 3y')(3x' + 4y') + 16(3x' + 4y')^2] - \\ & - \frac{20}{5}(4x' - 3y') + \frac{110}{5}(3x' + 4y') - 50 = 0, \\ & \frac{1}{25} [144x'^2 - 216x'y' + 81y'^2 - 288x'^2 - 168x'y' + 288y'^2 + 144x'^2 + 384x'y' + 296y'^2] - \\ & - 16x' + 12y' + 66x' + 88y' - 50 = 0. \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие произведения $x'y'$, должны сократиться. Кроме того, т. к. $\delta = 0$, то одна из переменных в квадрате сокращается полностью:

$$25y'^2 + 50x' + 100y' - 50 = 0, \text{ откуда } y'^2 + 2x' + 4y' - 2 = 0.$$

Выделяем полный квадрат:

$$(y'^2 + 4y' + 4) - 4 + 2x' - 2 = 0, \text{ или } (y' + 2)^2 + 2(x' - 3) = 0$$

и делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' - 3, \\ y'' = y' + 2. \end{cases}$$

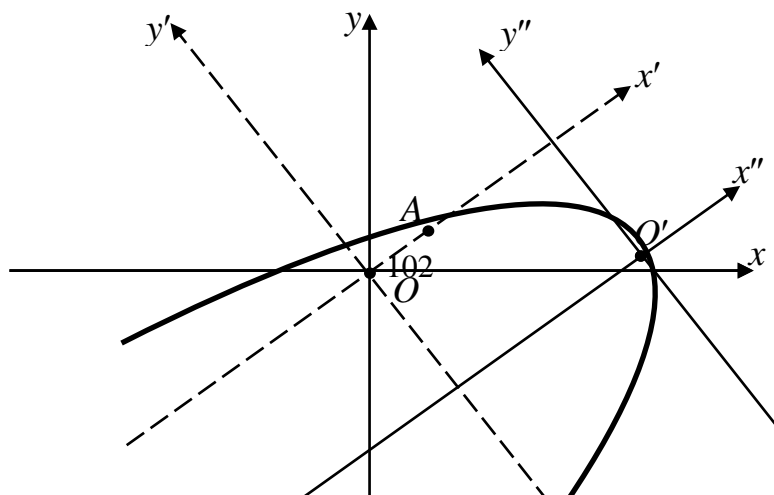
Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3, -2)_{O'x'y'}$. Подчеркнем, что это координаты относительно второй системы координат $O'x'y'$.

$$y''^2 = -2x'' - \text{парабола.}$$

Ее параметр $p = 1$, а ось параболы — $O'x''$.

Описание построения:

1. Совершаем поворот координатных осей, зная что $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$.
2. Новое начало координат $O'(3, -2)$ в системе координат $Ox'y'$.
3. Координатные оси $O'x''$ и $O'y''$.
4. Для построения параболы любым способом находим дополнительную точку; например, если $y' = 0$, тогда $x' = 1$, т. е. $A(1, 0)_{O'x'y'}$ — дополнительная точка (в системе $Ox'y'$).



Итак, мы установили, что общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0$$

задает одну из следующих кривых второго порядка (sign x означает знак числа x).

sign δ	sign $s \cdot \Delta$	Кривая и ее каноническое уравнение	Кол-во центров
+	–	Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	1
+	+	Мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	
–	\pm	Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
–	0	Пара пересекающихся прямых $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$	
+	0	Пара мнимых пересекающихся прямых $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$	
0	\pm	Парабола $y^2 = 2px$	0
0	0	Пара параллельных прямых $x^2 = a^2$ Пара мнимых параллельных прямых $x^2 = -a^2$ Пара совпадающих прямых $x^2 = 0$	∞

Вопросы для самопроверки

1. Какие преобразования систем координат вы знаете?
2. Какое преобразование называется сдвигом?
3. Какое преобразование называется поворотом?
4. Запишите формулы преобразований сдвига и поворота.
5. Запишите общее уравнение кривой второго порядка.

6. К каким типам сводится общее уравнение кривой второго порядка.
 7. С помощью какого преобразования можно упростить общее уравнение кривой второго порядка: а) убрав члены, содержащие произведение координат; б) убрав члены, содержащие переменные.

Практическая часть 4

Приведение кривых второго порядка к каноническому виду

Пример 1. Показать, что уравнение $4x^2 + y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$ задает эллипс. Найти координаты фокусов. Сделать чертеж.

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Ищем координаты центра:
$$\begin{cases} 4x_0 - 2 = 0, \\ y_0 + 3 = 0. \end{cases}$$

Значит, центр кривой находится в точке $O'(\frac{1}{2}, -3)$.

Находим $c' = -2x_0 + 3y_0 - 6 = -16$.

Значит в новой системе координат уравнение кривой примет вид

$$4x'^2 + y'^2 - 16 = 0 \text{ или } \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{16} = 1.$$

Это уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OY' .

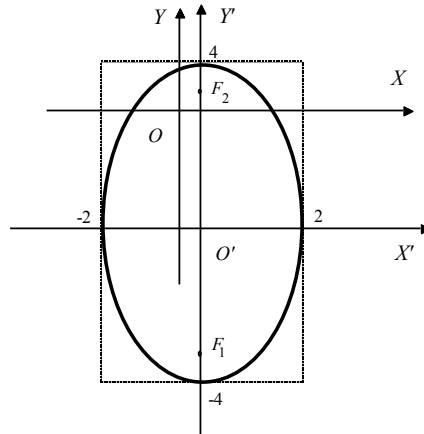
Таким образом, искомое уравнение кривой второго порядка приведено к каноническому виду лишь сдвигом системы координат.

Найдем координаты фокусов. Здесь $c^2 = b^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$, откуда $c = 2\sqrt{3}$. Тогда в новой системе координат $F_1(0, -2\sqrt{3})$, $F_2(0, 2\sqrt{3})$.

В соответствие с формулами параллельного переноса $x = x' + \frac{1}{2}$,
 $y = y' - 3$.

Тогда в исходной системе координат для фокусов получим

$$F_1\left(\frac{1}{2}, -2\sqrt{3}-3\right), F_2\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{3}-3\right).$$



Пример 2. Показать, что уравнение $xy = 2$ относится к гиперболическому типу и определяет гиперболу. Найти координаты фокусов гиперболы. Сделать чертеж.

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ищем координаты центра: $\begin{cases} y_0 = 0, \\ x_0 = 0, \end{cases}$ т. е. $O'(0, 0)$.

Значит, кривая приводится к каноническому виду лишь поворотом системы координат.

Совершаем поворот координатных осей на угол α , тангенс которого находим по формуле

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = 0,$$

откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда формулы перехода имеют вид

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

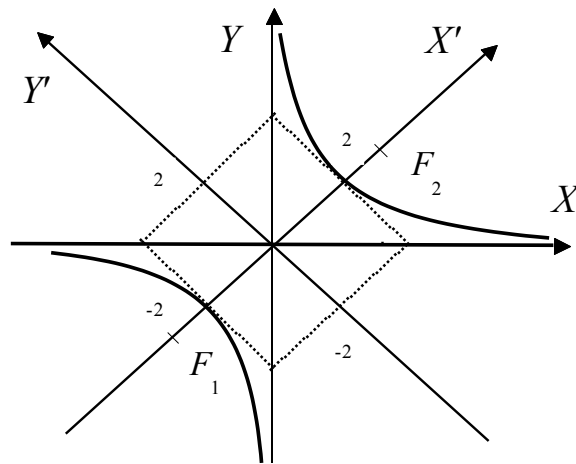
Подставляя в данное по условию уравнение, имеем

$\frac{(x' - y')(x' + y')}{2} = 2$, или $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$ – равносторонняя гипербола, асимптотами которой являются оси OX и OY .

Для нее $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8$, откуда $c = 2\sqrt{2}$. Тогда фокусы гиперболы в новой системе координат $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$, $F_2(2\sqrt{2}, 0)$

и в исходной системе координаты $F_1: x = \frac{\sqrt{2}}{2}(-2\sqrt{2} - 0) = -2$,

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-2\sqrt{2} + 0) = -2$, т. е. $F_1(-2; -2)$. Аналогично $F_2(2; 2)$.



Пример 3. Привести к каноническому виду и построить кривую, заданную уравнением $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0$.

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

В данном случае не можем применить процедуру нахождения центра, поэтому сразу поворачиваем координатные оси:

$$12 \operatorname{tg}^2 \alpha - 7 \operatorname{tg} \alpha - 12 = 0,$$

$$D = 49 + 576 = 625,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{7 - 25}{-24} = \frac{3}{4}, \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{7 + 25}{-24} = -\frac{4}{3}.$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}; \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 4y'). \end{cases}$$

Определяем для дальнейшего построения, что $\varphi = \arcsin 0,6 \approx 39^\circ$.

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$$\frac{16}{25}(4x' - 3y')^2 + \frac{24}{25}(4x' - 3y')(3x' + 4y') + \frac{9}{25}(3x' + 4y')^2 -$$

$$- \frac{7}{5}(4x' - 3y') + \frac{26}{5}(3x' + 4y') - 34 = 0,$$

$$25x'^2 + 10x' + 25y' - 34 = 0,$$

$$25\left(x' + \frac{1}{5}\right)^2 + 25y' - 35 = 0,$$

$$\left(x' + \frac{1}{5}\right)^2 = -\left(y' - \frac{7}{5}\right).$$

Из этого уравнения получаем величины сдвигов для параллельного переноса:

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{5} \\ y'' = y' - \frac{7}{5} \end{cases}$$

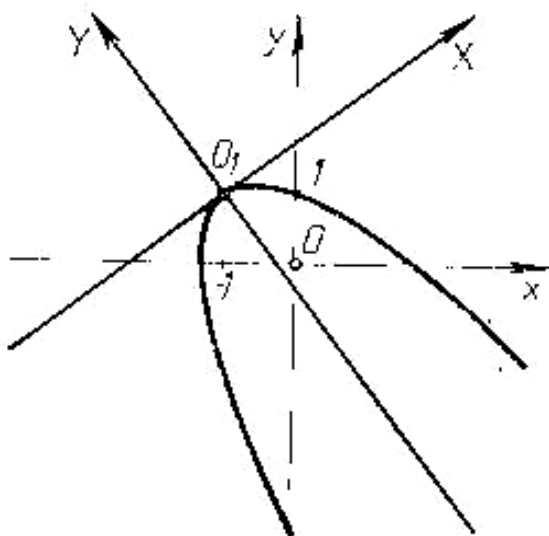
Окончательно получаем каноническое уравнение параболы:

$$x''^2 = -y''.$$

Вершина этой параболы имеет координаты $x'' = 0$; $y'' = 0$ в системе $x''Oy''$, т. е. в системе $x'Oy'$ — $x' = -\frac{1}{5}$; $y' = \frac{7}{5}$, и в исходной сис-

теме $x = \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5} - \frac{21}{5}\right) = -1$; $y = \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{5} + \frac{28}{5}\right) = 1$.

Итак, вершина искомой параболы находится в точке $O_1(-1; 1)$.



Задачи для самостоятельной работы

1. Определить тип (эллиптический, гиперболический, параболический) каждого из следующих уравнений; каждое из них путем параллельного переноса осей координат привести к простейшему виду; установить, какие геометрические образы они определяют, и изобразить на чертеже расположение этих образов относительно старых и новых осей координат:

- а) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;
- б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;
- в) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$;
- г) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$;
- д) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$.

2. Каждое из следующих уравнений привести к каноническому виду; определить тип каждого из них; установить, какие геометрические образы они определяют; для каждого случая изобразить на чертеже оси первоначальной координатной системы, оси других координатных систем, которые вводятся по ходу решения, и геометрический образ, определяемый данным уравнением:

- а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
- б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
- в) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
- г) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;
- д) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;
- е) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

3. Установить, что следующие уравнения являются параболическими:

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0$;

б) $9x^2 - 6xy + y^2 - x + 2y - 14 = 0$;

в) $25x^2 - 20xy + 4y^2 + 3x - y + 11 = 0$;

г) $16x^2 + 16xy + 4y^2 - 5x + 7y = 0$;

д) $9x^2 - 42xy + 49y^2 + 3x - 2y - 24 = 0$.

Ответы:

1. а) Эллиптическое уравнение; определяет эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

$O' (5; -2)$ – новое начало;

б) гиперболическое уравнение; определяет гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $O' (3; -2)$ – новое начало;

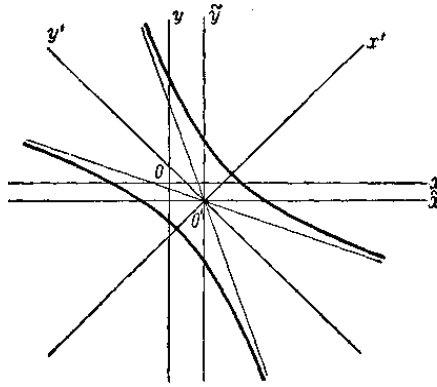
в) эллиптическое уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$; не определяет никакого геометрического образа (является уравнением «мнимого эллипса»);

г) гиперболическое уравнение; определяет выраженную гиперболу – пару пересекающихся прямых $4x^2 - y^2 = 0$; $O' (-1; -1)$ – новое начало;

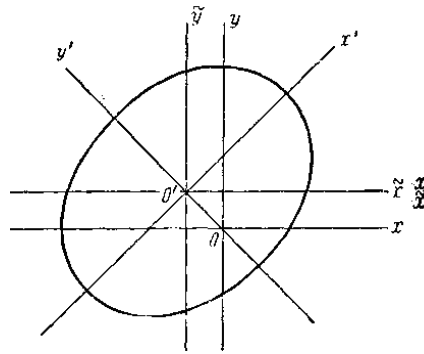
д) эллиптическое уравнение; определяет вырожденный эллипс (единственную точку) $2x^2 + 3y^2 = 0$.

2. а) Гиперболическое уравнение; определяет гиперболу, уравнение которой приводится к виду $x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1$ путем двух последовательных преобразований координат

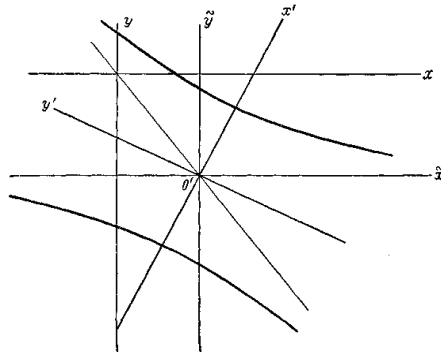
$$x = \tilde{x} + 2, y = \tilde{y} - 1 \text{ и } \tilde{x} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \tilde{y} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}};$$



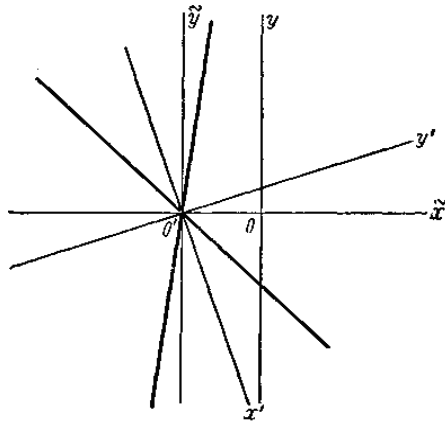
б) эллиптическое уравнение; определяет эллипс, уравнение которого приводится к виду $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$ путем двух последовательных преобразований координат $x = \tilde{x} - 1$, $y = \tilde{y} + 1$ и $\tilde{x} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$;



в) гиперболическое уравнение; определяет гиперболу, уравнение которой приводится к виду $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{36} = 1$ путем двух последовательных преобразований координат $x = \tilde{x} + 3$, $y = \tilde{y} - 4$ и $\tilde{x} = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}$, $\tilde{y} = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$;



г) гиперболическое уравнение; определяет вырожденную гиперболу – пару пересекающихся прямых, уравнение которых приводится к виду $x'^2 - 4y'^2 = 0$ путем двух последовательных преобразований координат $x = \tilde{x} - 2$, $y = \tilde{y}$ и $\tilde{x} = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}}$, $\tilde{y} = \frac{-3x' + y'}{\sqrt{10}}$;



д) эллиптическое уравнение; не определяет никакого геометрического образа – «мнимый эллипс»; его уравнение приводится к виду $x'^2 + 2y'^2 = -1$ путем двух последовательных преобразований координат $x = \tilde{x} - 1$, $y = \tilde{y}$ и $\tilde{x} = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}}$, $\tilde{y} = \frac{-3x' + y'}{\sqrt{10}}$;

е) эллиптическое уравнение; определяет вырожденный эллипс – единственную точку; его уравнение приводится к виду $2x'^2 + 3y'^2 = 0$ путем двух последовательных преобразований координат

3. а) $(x + 2y)^2 + 4x + y - 15 = 0$;
- б) $(3x - y)^2 - x + 2y - 14 = 0$;
- в) $(5x - 2y)^2 + 3x - y + 11 = 0$;
- г) $(4x + 1y)^2 - 5x + 7y = 0$;
- д) $(3x - 7y)^2 + 3x - 2y - 24 = 0$.

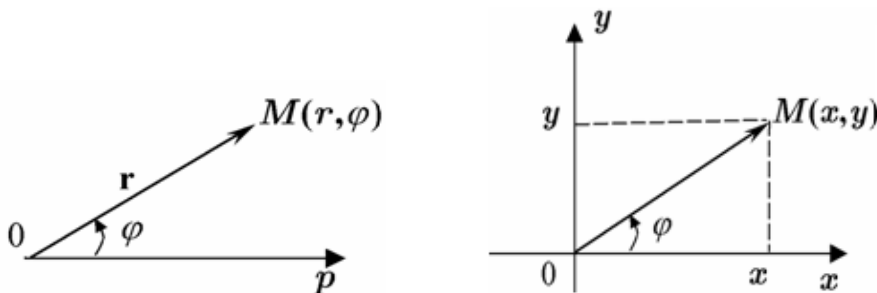
Домашнее задание

Выполните задания 13–15 из прил. 1.

8. УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ И В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВИДЕ

8.1. Задание кривых в полярной системе координат

Пусть точка M лежит на плоскости. Исходя из некоторой точки O (полюса), проведем ось Op , называемую полярной осью.



Из полюса проведем радиус-вектор r . Обозначим через φ угол, отсчитываемый от полярной оси по направлению к радиус-вектору против часовой стрелки. Положение точки M на плоскости однозначно определено параметрами r и φ , где r – длина радиус-вектора. Ясно, что $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Совместим теперь начало декартовой системы координат xOy с полюсом, а полярную ось Op направим вдоль оси Ox . Тогда нетрудно установить связь между декартовыми и полярными координатами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Часто из соображений большей наглядности или простоты выкладок бывает удобно учитывать связь между декартовыми и полярными координатами, переходить от уравнения кривой в декартовых координатах к ее уравнению в полярных координатах и наоборот.

Рассмотрим в полярной системе координат произвольную линию L и уравнение $F(\varphi, r) = 0$.

Определение. Уравнение $F(\varphi, r) = 0$ называется **уравнением линии L** в полярной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M(\varphi, r)$, принадлежащей линии L , и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей L .

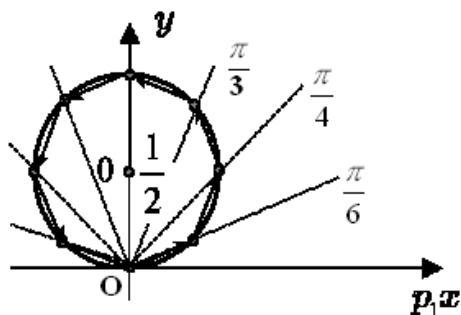
Пример. Нарисовать кривую $r = \sin \varphi$ и найти ее уравнение в декартовых координатах.

Решение:

Заметим, что синус -2π – периодическая функция. Берем промежуток изменения для $\varphi \in [0; \pi]$, т. к. в этом промежутке $\sin \varphi \geq 0$. Ясно, что кривая лежит в верхней полуплоскости. Составим таблицу для значений r в зависимости от φ :

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Теперь можно нарисовать данную кривую, проводя из полюса лучи под углом $\varphi = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \dots; \pi$ и откладывая на этих лучах значения соответственно равные $0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \dots$. Получим набор точек, через которые остается провести нашу кривую.



Найдем уравнение этой кривой в декартовых координатах.

Так как $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$, то ясно, что, $x^2 + y^2 = r^2$, откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тогда уравнение исходной кривой в декартовых координатах будет иметь вид

$$r = \frac{y}{r} \text{ или } r^2 - y = 0, \text{ т. е. } x^2 + y^2 - y = 0.$$

Приведем полученное уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду, выделив полный квадрат:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \text{ или } x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

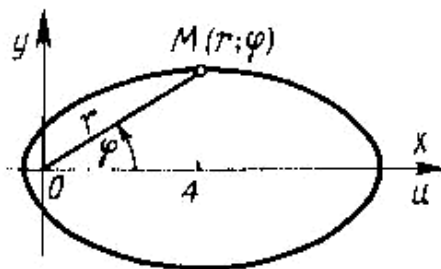
Получим каноническое уравнение окружности радиуса $r = \frac{1}{2}$ с центром в точке $O\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Изученные выше кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола) имеют в полярной системе координат следующее уравнение:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

если полюс находится в фокусе, полярная ось направлена из фокуса к ближайшей вершине, p – фокальный параметр, ε – эксцентриситет кривой. Отметим при этом, что для гиперболы приведенное уравнение определяет лишь одну ее ветвь.

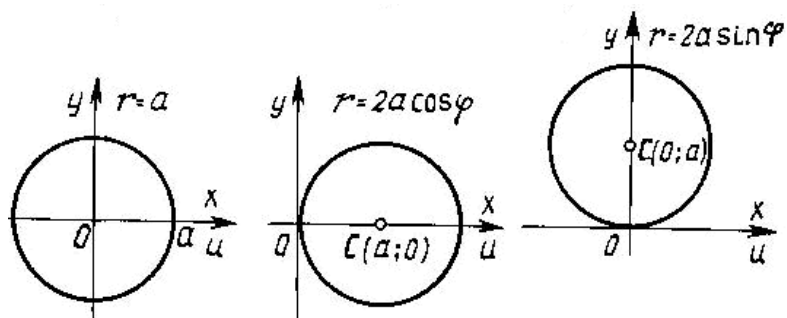
Например, эллипс $r = \frac{\frac{9}{5}}{1 - \frac{4}{5} \cos \varphi}$ имеет следующий вид:



Отметим несколько уравнений, наиболее используемых в курсе математики кривых.

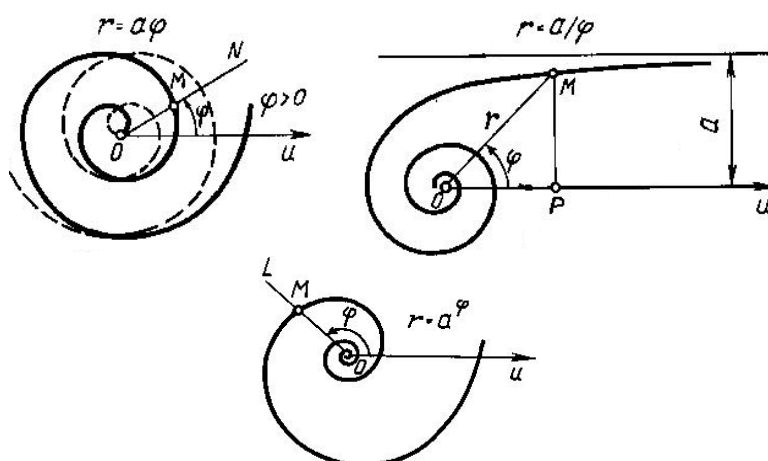
1. Окружности:

- $r = a$ – центральная окружность,
- $r = 2a \cos \varphi$ – правая окружность,
- $r = 2a \sin \varphi$ – верхняя окружность.



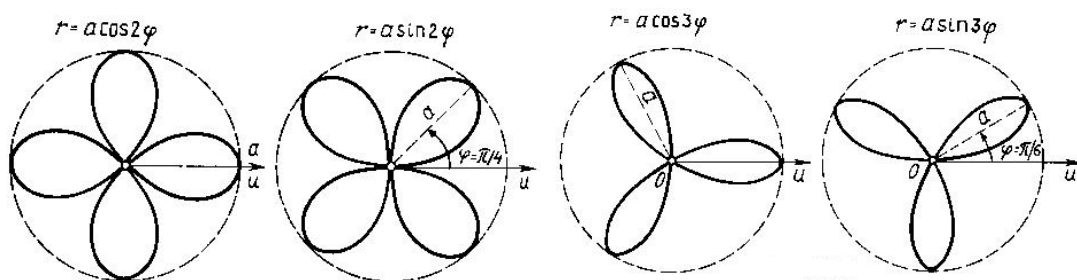
2. Спирали:

- $r = \alpha \varphi$ – спираль Архимеда,
- $r = \frac{a}{\varphi}$ – гиперболическая спираль,
- $r = \alpha^{\varphi}$ – логарифмическая спираль.

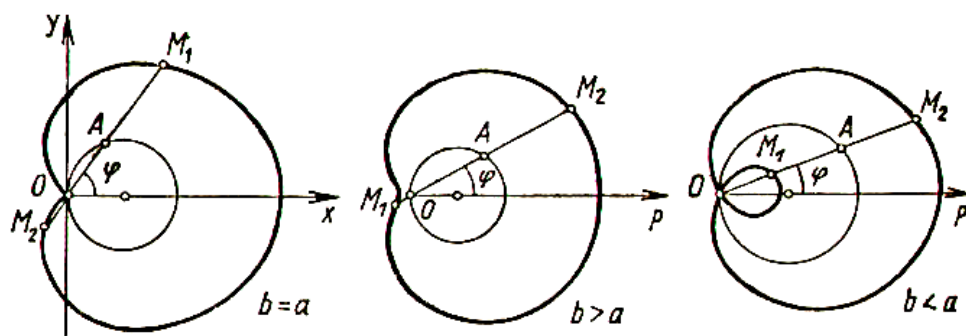


3. Розы:

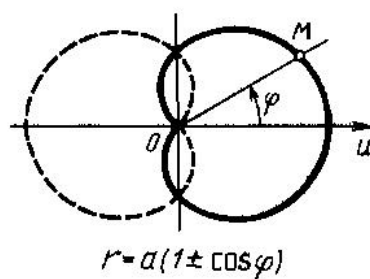
- $r = a \sin 3\varphi$, $r = a \cos 3\varphi$ – трехлепестковые розы,
- $r = a \sin 2\varphi$, $r = a \cos 2\varphi$ – четырехлепестковые розы.



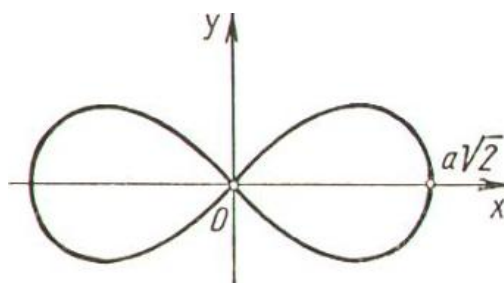
4. Улитка Паскаля $r = a \cos \varphi + b$.



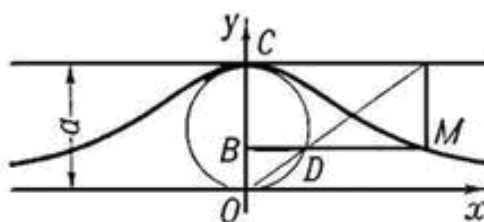
5. Кардиоида $r = a(1 \pm \cos \varphi)$.



6. Лемниската Бернулли $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.



7. Локон Аньези $r \sin \varphi = \frac{a^3}{a^2 + r^2 \cos \varphi}$ (в декартовой системе координат $x^2 y = a^2(a - y)$):



8.2. Задание кривых в параметрическом виде

Определение. Уравнения вида $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$ назы-

вают *параметрическими уравнениями линии*, если при изменении параметра t эти формулы дают координаты всех точек данной линии, и только этих точек.

В частности, окружность с центром в начале координат $x^2 + y^2 = r^2$ может быть задана параметрически, уравнениями

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases}$$

где параметр t означает угол, который образует с положительным направлением оси OX радиус-вектор точки M .

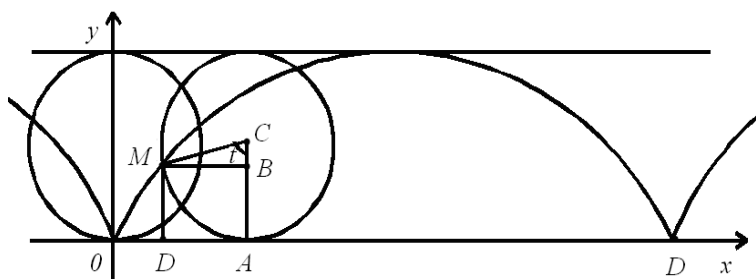
Действительно, возведя обе части параметрических уравнений в квадрат и сложив почленно, получим

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t), \text{ или } x^2 + y^2 = r^2.$$

Параметрические уравнения прямой, окружности, эллипса, гиперболы и параболы представлены в таблице ниже.

Кривая	Уравнение в декартовой системе координат	Параметрическое задание	Значения параметра
Прямая	$y = kx + b$	$\begin{cases} x = t, \\ y = at + b \end{cases}$	$t \in R$
Окружность	$x^2 + y^2 = a^2$	$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t \end{cases}$	$0 \leq t < 2\pi$
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$	$0 \leq t < 2\pi$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$	$t \in R$
Парабола	$y^2 = 2px$	$\begin{cases} x = t, \\ y = 2pt \end{cases}$	$0 \leq t < \infty$

Определение. *Циклоидой* называется кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии.



Пример. Вывести параметрические уравнения циклоиды.

Решение:

Пусть OX – прямая, по которой катится окружность радиуса a . Пусть точка M , начав движение из начала координат, повернулась на угол t . Очевидно, что $OA = MA = at$. Координаты точки M :

$$\begin{cases} x = OD = OA - DA = at - a \sin t = a(t - \sin t), \\ y = MD = BA = CA - CB = a - a \cos t = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

или

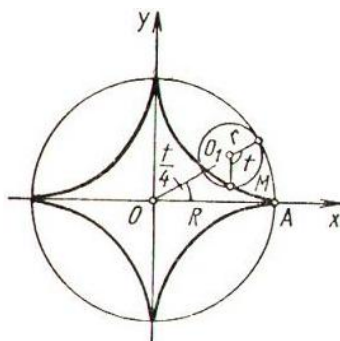
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

При $0 \leq t \leq 2\pi$ полученные уравнения описывают одну арку циклоиды, при $-\infty < t < \infty$ – всю циклоиду.

Определение. *Астроидой* называется замкнутая кривая, описываемая точкой окружности радиуса r , катящейся без скольжения по внутренней стороне неподвижного круга радиуса $a = 4r$.

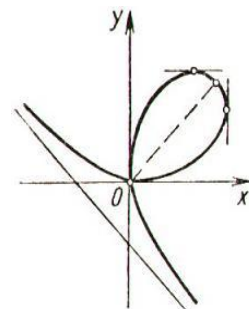
Параметрические уравнения астроиды имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \\ 0 \leq t < 2\pi \end{cases}$$

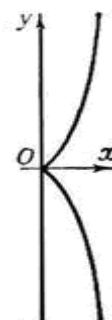


Приведем графики некоторых кривых, задаваемых параметрически:

$$1. \quad \text{Декартов лист} \quad \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, & -\infty < t < -1; \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, & -1 < t < \infty. \end{cases}$$



$$2. \quad \text{Полукубическая парабола} \quad \begin{cases} x = t^2, \\ y = at^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$



Вопросы для самопроверки

1. Как вводится полярная система координат на плоскости?
2. Объясните, как построить точки на плоскости по полярным координатам.
3. Как определить декартовы координаты x и y точки M , если известны ее полярные координаты ρ и φ ?
4. Как определить полярные координаты ρ и φ точки M , если известны ее декартовы координаты x и y ?
5. Могут ли быть прямоугольные и полярные координаты точки представлены одной и той же парой чисел?
6. Чему равно расстояние между точками $M_1 (\rho_1; \varphi_1)$, $M_2 (\rho_2; \varphi_2)$ в полярной системе координат?
7. Как задается линия параметрически?
8. Дать определение циклоиды и астроида.
9. Вывести уравнение циклоиды.

Практическая часть 5

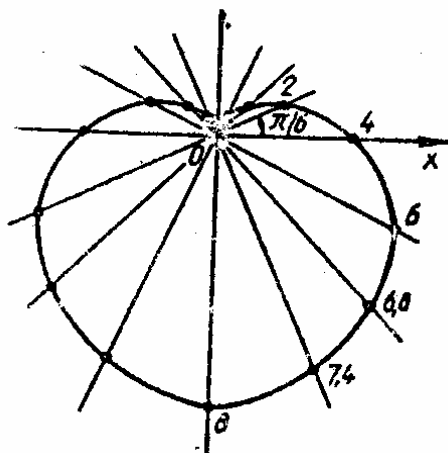
Задание кривых в полярной системе координат и параметрически

Пример 1. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярной системе координат $r = 4(1 - \sin\varphi)$.

Решение:

Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла $\varphi_i (i = \overline{1; 16})$ и соответствующие им значения полярного радиуса r_i :

φ_i	r_i	φ_i	r_i
0	4	π	4
$\frac{\pi}{6}$	2	$\frac{7\pi}{6}$	6
$\frac{\pi}{4}$	1,2	$\frac{5\pi}{4}$	6,8
$\frac{\pi}{3}$	0,6	$\frac{4\pi}{3}$	7,4
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$	8
$\frac{2\pi}{3}$	0,6	$\frac{5\pi}{3}$	7,4
$\frac{3\pi}{4}$	1,2	$\frac{7\pi}{4}$	6,8
$\frac{5\pi}{6}$	2	$\frac{11\pi}{6}$	6



Пример 2. Написать уравнение линии $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ в полярной системе координат.

Решение:

Так как $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$ то после подстановки имеем

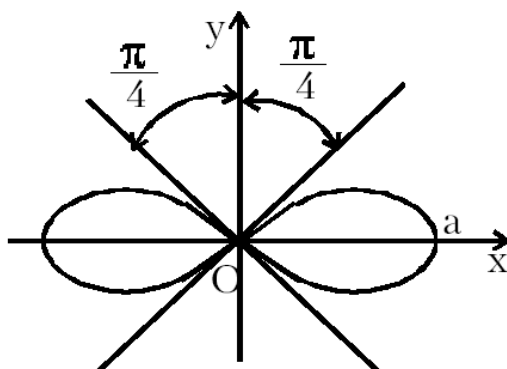
$$r^4(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 = r^2 a^2(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi),$$

откуда $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ или $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ – лемниската Бернулли.

Для построения этой кривой учтем, что полярный радиус r можно определить лишь для тех углов, для которых выполняется неравенство $\cos 2\varphi \geq 0$, т. е. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

При $k=0$: $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, при $k=1$: $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. Значит, искомая линия располагается лишь в указанных секторах.



Пример 3. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид $r = \frac{4}{3 - \cos \varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определить тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Решение:

Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; тогда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}, \quad 3\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4; \quad 3\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4;$$

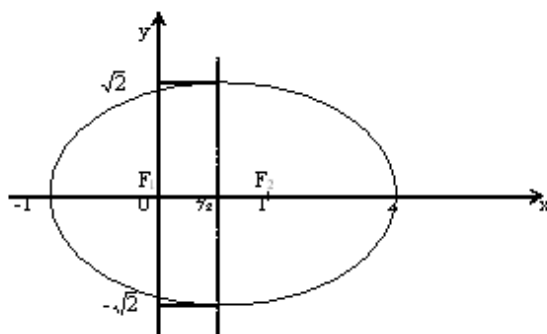
$$9x^2 + 9y^2 = 16 + 8x + x^2; \quad 8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0;$$

$$8(x^2 - x + 1/4) - 8 \cdot 1/4 + 9y^2 - 16 = 0; \quad 8(x - \frac{1}{2})^2 - 2 + 9y^2 - 16 = 0;$$

$$8(x - \frac{1}{2})^2 + 9y^2 = 18; \quad \frac{(x - 1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на $\frac{1}{2}$ вправо, большая полуось a равна $\frac{3}{2}$, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равна $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}$. Эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$.

Фокусы $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 0)$.



Пример 4. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определить тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

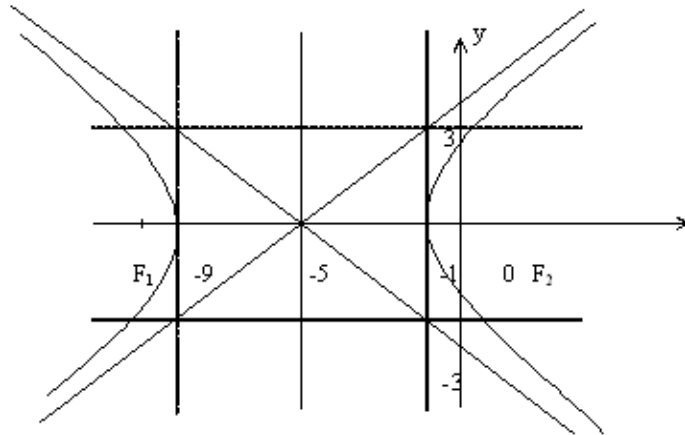
Решение:

Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{9}{4 - \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}
 4\sqrt{x^2 + y^2} - 5x &= 9; \\
 16x^2 + 16y^2 &= 81 + 90x + 25x^2; \\
 9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 &= 0; \\
 9(x+5)^2 - 225 - 16y^2 + 81 &= 0; \quad 9(x+5)^2 - 16y^2 = 144; \\
 \frac{(x+5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} &= 1.
 \end{aligned}$$



Получили каноническое уравнение гиперболы. Из уравнения видно, что гипербола сдвинута вдоль оси Ox на 5 влево, большая полуось a равна 4, меньшая полуось b равна 3, откуда получаем $c^2 = a^2 + b^2$; $c = 5$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(0; 0)$.

Пример 5. Параметрические уравнения кривых имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \begin{cases} x = 3\cos t - 1, \\ y = 3\sin t + 1; \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} x = 3\cos t - 1, \\ y = 4\sin t + 1; \end{cases} & \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3\cos^2 t - 1, \\ y = 3\sin^2 t + 1; \end{cases} \\
 \text{г) } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \end{cases} & \quad \text{д) } \begin{cases} x = 3 - 3t^2 + t, \\ y = 4 - 9t^2 + 3t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат.

Решение:

а) $\begin{cases} x+1 = 3\cos t, \\ y-1 = 3\sin t, \end{cases}$ откуда $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$ – окружность радиуса 3 с центром в точке $C(-1; 1)$;

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x+1}{3} = \cos t, \\ \frac{y-1}{4} = \sin t, \end{cases} \quad \text{откуда } \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1 \text{ — эллипс с полу-}$$

осями $a=3$ и $b=4$;

в) складывая уравнения, имеем $x+y=3$ — прямая линия;

$$\text{г) имеем систему двух уравнений } \begin{cases} x+y=e^x, \\ x-y=e^{-x}, \end{cases} \quad \text{перемножив ко-}$$

торые, получим $(x+y)(x-y)=1$, или $x^2 - y^2 = 1$ — гипербола;

$$\text{д) } \begin{cases} x-3 = -3t^2 + t, \\ y-4 = 3(-3t^2 + t), \end{cases} \quad \text{откуда } y-4 = 3(x-3),$$

т. е. $3x - y - 5 = 0$ — прямая линия.

Домашнее задание

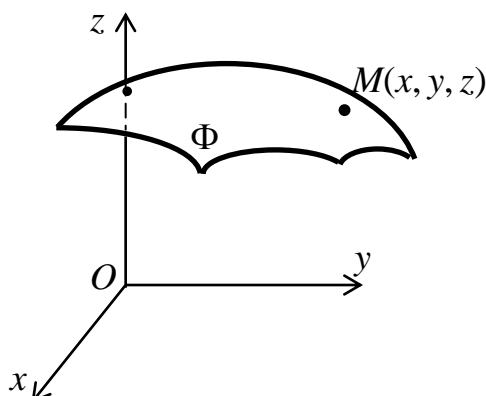
Выполните задание 16–18 из прил. 1.

Глава 2

Аналитическая геометрия в пространстве

9. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в прямоугольной системе координат $OXYZ$ произвольную поверхность S и уравнение $F(x, y, z) = 0$.



Определение. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется *уравнением данной поверхности S* , если этому уравнению удовлетворяют координаты x, y, z любой точки $M(x, y, z) \in S$ и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на поверхности.

Другими словами, если известно уравнение поверхности, то относительно любой точки пространства можно решить вопрос: лежит ли она на этой поверхности. Для этого достаточно координаты испытуемой точки подставить в уравнение поверхности вместо переменных. Если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на этой поверхности.

Определение. Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид

$$\sum_{k=0}^m a_k x^{p_k} y^{q_k} z^{r_k} = 0,$$

где p_k, q_k, r_k — целые неотрицательные числа, и при этом все a_k не равны нулю одновременно.

Определение. Число $N = \max_{k=[0; m]} \{p_k + q_k + r_k\}$ называется *порядком алгебраической поверхности*.

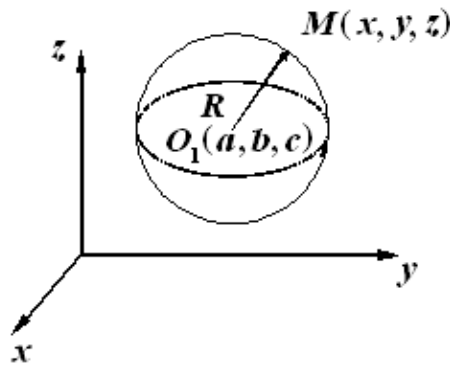
Пример 1. Плоскость $x + 2y + z + 2 = 0$ представляет собой поверхность первого порядка, эллипсоид $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ – поверхность второго порядка.

Можно определить две основные задачи аналитической геометрии:

- по геометрическим свойствам линии, поверхности найти их уравнение;
- по уравнению линии, поверхности исследовать их геометрические свойства.

Пример 2. Найти уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(a, b, c)$.

По определению, сфера радиуса R с центром в точке O_1 – множество точек пространства, удаленных от O_1 на расстояние R . Точка $M(x, y, z)$ (M – текущая точка; x, y, z – текущие координаты) лежит на сфере в том и только в том случае, когда $|O_1M| = R$.



Выражая длину отрезка O_1M через координаты его концов, получим, что $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$, или, после возведения в квадрат, $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ – искомое уравнение сферы.

В частности, сфера с центром в начале координат ($a = b = c = 0$) имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Пример 3. Уравнению поверхности $F \equiv y^2 + z^2 = 0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси OX , т. е. точек, для которых, $y = 0, z = 0, x$ – любое.

Пример 4. Уравнение $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не определяет никакой поверхности.

10. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

10.1. Векторное уравнение плоскости.

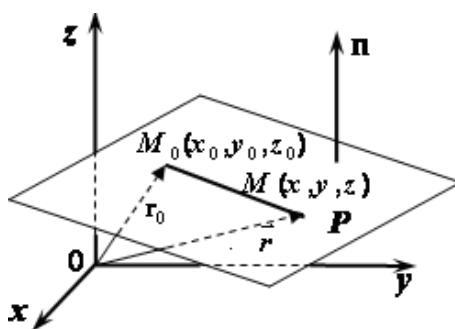
Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

Рассмотрим некоторую плоскость P и точку $M(x; y; z)$ на этой плоскости, так называемую текущую точку плоскости.

Определение. *Нормальный вектор к плоскости \vec{n} – любой ненулевой вектор, направленный перпендикулярно этой плоскости.*

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, лежащая на плоскости, и координаты нормального вектора $\vec{n} \{A; B; C\}$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Обозначим через \vec{r}_0 и \vec{r} – радиус-векторы точек M_0 и M .



Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

Очевидно, что вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{n} будут ортогональны тогда и только тогда, когда точка M лежит на данной плоскости. Условие $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ присуще лишь точкам, лежащим на плоскости P , и только этим точкам:

$$(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}) = 0.$$

Полученное уравнение

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

называется *векторным уравнением плоскости*.

Выражая скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярной данному вектору*.

Пример. Даны две точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(5; 3; 1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Решение:

Нормальный вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $\overline{M_1M_2} \{3; 4; -2\}$. Подставляя полученные координаты в уравнение плоскости, получаем искомое уравнение плоскости:

$$3(x - 2) + 4(y + 1) - 2(z - 3) = 0.$$

10.2. Общее уравнение плоскости

Преобразуем полученное выше уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} \{A; B; C\}$.

Раскрыв скобки, имеем $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$. Обозначив число $Ax_0 - By_0 - Cz_0$, стоящее во второй скобке, как $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Данное уравнение называется *общим уравнением* плоскости.

Коэффициенты A, B и C в общем уравнении прямой имеют простой геометрический смысл: они являются проекциями нормального вектора на оси координат. Свободный член D геометрического смысла не имеет. Имеет место следующая теорема.

Теорема. В декартовой прямоугольной системе координат любая плоскость определяется уравнением первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$, и наоборот, любое уравнение первой степени определяет плоскость в пространстве.

Доказательство. Уравнение каждой плоскости по описанной в предыдущем пункте процедуре может всегда быть записано в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Докажем обратное утверждение.

В самом деле, пусть зафиксирована произвольная декартова прямоугольная система $OXYZ$ и задано уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$, в котором A, B, C и D – любые постоянные, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Это уравнение заведомо имеет хотя бы одно решение x_0, y_0, z_0 .

Действительно, A , B и C одновременно не равны нулю. Пусть, например, $C \neq 0$. Тогда, взяв произвольное x_0 и y_0 , из уравнения получим

$$z_0 = -\frac{A}{C}x_0 - \frac{B}{C}y_0.$$

Таким образом, существует хотя бы одна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению первой степени, т. е. выполняется числовое равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Вычитая из исходного уравнения полученное числовое равенство, приходим к уравнению

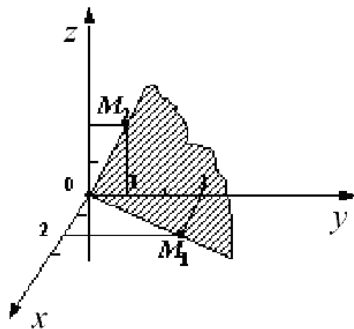
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое определяет плоскость, проходящую через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} \{A; B; C\}$.

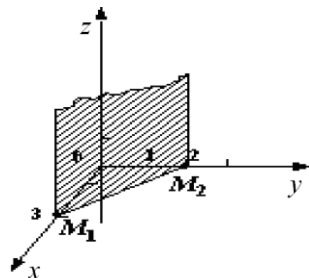
10.3. Неполные уравнения плоскости

В зависимости от значений постоянных A , B и C возможны следующие частные случаи:

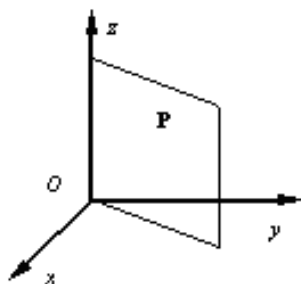
а) $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат $O(0; 0; 0)$;



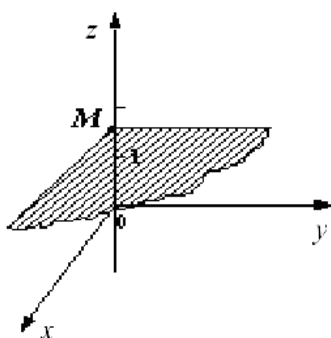
б) $C = 0$, $Ax + By + D = 0$, т. е. $\vec{n} \{A, B, 0\} \perp Oz$ – плоскость параллельна оси аппликат;



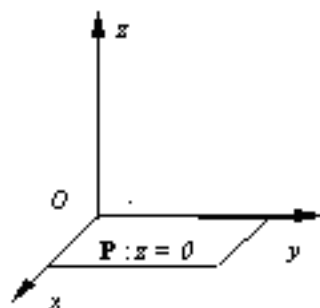
в) $C = D = 0$, $Ax + By = 0$, т. е. плоскость проходит через ось аппликат;



г) $A = B = 0$, $Cz + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости XOY ;



д) $A = B = D = 0$, $Cz = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью XOY .



10.4. Уравнение плоскости, проходящей через данные две точки в заданном направлении

Определение. *Направляющий вектор плоскости \vec{S} – любой ненулевой вектор, параллельный этой плоскости.*

Пусть плоскость задана точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, лежащими на плоскости, и направляющим вектором $\vec{S} \{m; n; p\}$.

Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит на указанной плоскости. Составим вектора

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}; \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

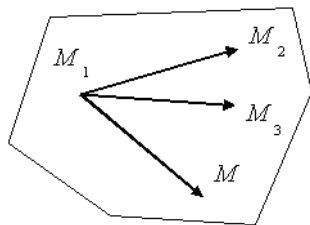
Очевидно, что вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и \vec{S} будут компланарны тогда и только тогда, когда точка M лежит на данной плоскости. Это условие присуще лишь точкам, лежащим на плоскости, и только этим точкам.

Таким образом, $(\overrightarrow{M_1M} \ \overrightarrow{M_1M_2} \ \vec{S}) = 0$, или уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

10.5. Уравнение плоскости, проходящей через данные три точки. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$ лежат на плоскости P .



Найдем уравнение плоскости P .

Запишем условие компланарности векторов

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

и $\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть искомое уравнение плоскости P , проходящей через три данные точки M_1, M_2, M_3 .

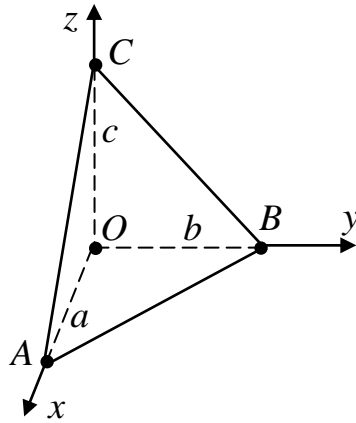
Пример 1. Составить уравнение плоскости P , проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$, $M_3(2; 0; 2)$.

Решение:

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Найдем координаты векторов $\overline{M_1M} = \{x-3; y+1; z-2\}$, $\overline{M_1M_2} = \{1; 0; -3\}$, $\overline{M_1M_3} = \{-1; 1; 0\}$ и составим уравнение плоскости P :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 3x + 3y + z - 8 = 0.$$

Напишем теперь уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$.



Запишем уравнение плоскости P , проходящей через три заданные точки A, B, C :

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

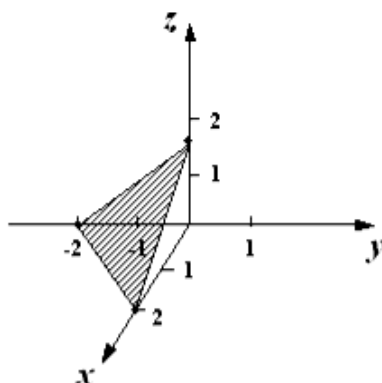
Раскрывая определитель, получим $bcx + acy + abz = abc$, или, после деления обеих частей на abc , имеем уравнение плоскости P :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Полученное уравнение называют *уравнением плоскости в отрезках*. Им удобно пользоваться при построении плоскостей.

Пример 2. Построить плоскость P , описываемую уравнением $3x - 3y + 4z - 6 = 0$.

Решение: Разделив обе части уравнения на 6, получим уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1,5} = 1$.

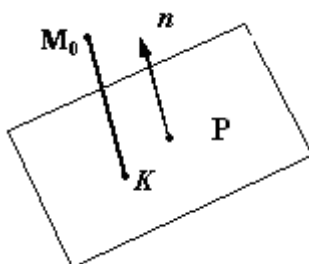


10.6. Расстояние от точки до плоскости

Теорема. Пусть плоскость P задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Тогда расстояние d от точки M_0 до плоскости P определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство. Расстояние от точки M_0 до плоскости P – это, по определению, длина перпендикуляра MK , опущенного из точки M_0 на плоскость P .



Вектор $\overrightarrow{KM_0}$ и нормальный вектор \vec{n} плоскости P параллельны, поэтому угол φ между ними равен 0 (или π , если вектор \vec{n} имеет направление противоположное, указанному на рисунке).

Поэтому

$$|\vec{n} \cdot \overline{KM_0}| = |\vec{n}| |\overline{KM_0}| \cos \varphi = |\vec{n}| \cdot d, \text{ откуда } d = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{KM_0}|}{|\vec{n}|}.$$

Координаты точки K , которые нам неизвестны, обозначим x_1, y_1, z_1 . Тогда $\overline{KM_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$, т. к. $\vec{n} \{A, B, C\}$, то

$$|\vec{n} \cdot \overline{KM_0}| = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1).$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получим

$$|\vec{n} \cdot \overline{KM_0}| = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1).$$

Точка K лежит на плоскости P , поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Отсюда находим, что $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$.

Подставив полученный результат в последнюю формулу, получим $|\vec{n} \cdot \overline{KM_0}| = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$, откуда и следует доказываемая формула.

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(2, -1, -1)$ до плоскости P , заданной уравнением $16x - 12y + 15z - 4 = 0$.

Решение:

$$d = \frac{|16 \cdot 2 - 12 \cdot (-1) + 15 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = \frac{25}{25} = 1.$$

10.7. Угол между плоскостями.

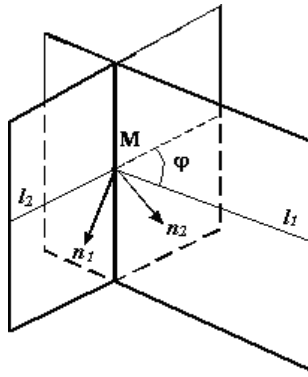
Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

Угол между двумя плоскостями измеряется наименьшим углом между нормальными к ним.

Следовательно, если даны две плоскости: плоскость $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и плоскость $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол φ между ними можно вычислить из соотношения $|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \varphi$.

Отсюда следует, что

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

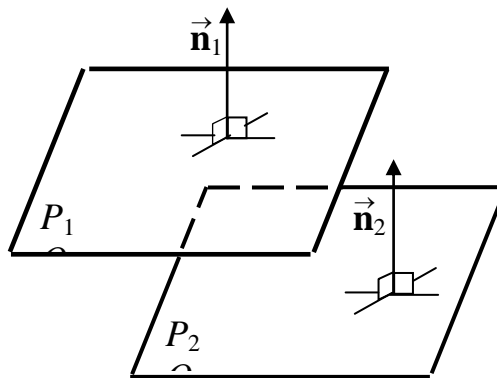


Интересны частные случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве.

Условие параллельности двух плоскостей

Если две плоскости параллельны, то нормали к ним коллинеарны. Следовательно, условие параллельности двух плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$



Условие перпендикулярности двух плоскостей

Если две плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и нормали к ним, т. е. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, откуда следует

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Заметим, что приведенные условия не только необходимы, но и достаточны соответственно для параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Все возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве приведены в таблице ниже.

Геометрическое условие для плоскостей	Возможная векторная форма представления
Параллельность	$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
Совпадение	$\begin{cases} \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2, \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \end{cases}$
Ортогональность	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, или $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

Пример. Вычислить угол между плоскостями:

$$P_1: 2x - y + 2z + 15 = 0, P_2: 6x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

Решение:

$$\vec{n}_1 = \{2; -1; 2\} \perp P_1, \quad \vec{n}_2 = \{6; 2; -3\} \perp P_2,$$

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 6 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21},$$

откуда

$$\varphi = \arccos \frac{4}{21}.$$

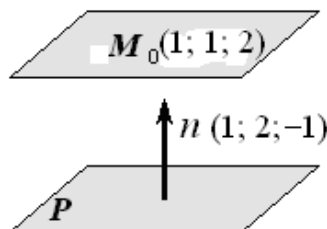
Вопросы для самопроверки

1. Что называется уравнением плоскости? Приведите примеры уравнений плоскости.
2. Что называется общим уравнением плоскости?
3. Дайте определение нормального вектора плоскости. В чем состоит геометрический смысл коэффициентов A , B , C общего уравнения плоскости?
4. Запишите в общем виде уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.
5. Как расположена плоскость по отношению к координатным осям, если один из коэффициентов в ее общем уравнении равен нулю? Приведите примеры.
6. Как записывается уравнение плоскости, если одна из координат ее направляющего вектора равна нулю?
7. Как выводится уравнение плоскости, проходящей через данные две точки в заданном направлении?
8. Выведите уравнение плоскости, проходящей через три точки.
9. Сформулируйте и докажите условия параллельности (перпендикулярности) плоскостей, заданных общими уравнениями.
10. Дайте определение угла между двумя пересекающимися плоскостями.
11. По какой формуле находится расстояние от данной точки до плоскости, заданной общим уравнением?

Практическая часть 6
Плоскость в пространстве

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 1; 2)$ и параллельной данной плоскости $P: x + 2y - z + 3 = 0$.

Решение:



Искомая плоскость параллельна данной, следовательно, нормаль к плоскости P $\vec{n} \{1; 2; -1\}$ является нормалью также и к искомой плоскости.

Принимая во внимание уравнение плоскости, проходящей через данную точку, получим уравнение искомой плоскости:

$$1(x - 1) + 2(y - 1) - 1(z - 2) = 0.$$

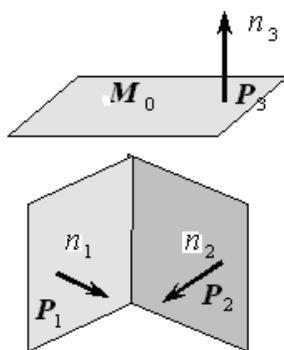
Раскрывая скобки и приводя подобные члены, окончательно получаем общее уравнение искомой плоскости:

$$x - 2y - z - 1 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(1; 1; 2)$ и перпендикулярную к двум данным плоскостям:

$$P_1: x + 2y - z + 3 = 0 \text{ и } P_2: 2x - y - 2z - 1 = 0.$$

Решение:



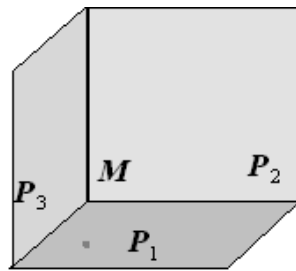
В качестве нормали $\overline{n_1}$ мы можем взять вектор $\overline{n_3} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$, так как в силу определения векторного произведения вектор $\overline{n_3}$ перпендикулярен как к вектору $\overline{n_1} \{1; 2; -1\}$, так и к вектору $\overline{n_2} \{2; -1; -2\}$.

Вычисляем

$$\overline{n_3} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -5\bar{i} - 5\bar{k}.$$

Таким образом, $\overline{n_3} \{-5; 0; -5\}$, и искомое уравнение плоскости имеет вид $-5(x-1) - 5(z-2) = 0$, или окончательно $x + z - 3 = 0$.

Пример 3. Найти точку пересечения плоскостей $P_1: x + y + z - 3 = 0$, $P_2: 2x - y - z = 0$, $P_3: x + 2y - z - 2 = 0$.



Решение:

Координаты точки пересечения плоскостей удовлетворяют каждому из уравнений плоскости, следовательно, решение задачи сводится к нахождению решения системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y - z = 0, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Найдем решение этой системы по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-3) = 9;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 = 9;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-9) = 9;$$

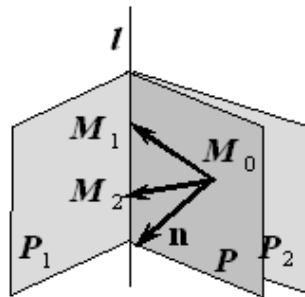
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-9) = 9.$$

Тогда решение системы $x=1$; $y=1$; $z=1$, и точка пересечения плоскостей $M(1; 1; 1)$.

Пример 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ и линию пересечения плоскостей $P_1: x + y + z - 3 = 0$ и $P_2: 2x + y - z - 2 = 0$.

Решение:

Возьмем на линии пересечения плоскостей две какие-нибудь (любые) различные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ так, чтобы координаты этих точек удовлетворяли системе двух уравнений, полученной из уравнений плоскостей.



Эта система содержит два уравнения с тремя неизвестными, значит, она имеет бесчисленное множество решений (это есть множество точек, лежащих на линии пересечения плоскостей L).

Зафиксируем в этой системе переменную z , положив, например, $z_1 = 0$, тогда получим

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 3, \\ 2x_1 + y_1 = 2, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -1$; $y_1 = 4$, т. е. точка $M_1(-1; 4; 0)$.

Положим теперь $z_2 = 1$, тогда

$$\begin{cases} x_2 + y_2 = 2, \\ 2x_2 + y_2 = 3, \end{cases}$$

откуда $x_2 = 1$; $y_2 = 1$, т. е. точка $M_2 (1; 1; 1)$.

Введем в рассмотрение векторы $\overline{M_0M_1} \{-2; 5; 1\}$ и $\overline{M_0M_2} \{0; 2; 2\}$. Теперь можно найти нормаль к искомой плоскости P :

$$\bar{n} = \overline{M_0M_1} \times \overline{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8\bar{i} + 4\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Сокращая на 4, возьмем более простое выражение для нормали $\bar{n} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Теперь остается написать уравнение искомой плоскости P :

$$P: 2(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0, \text{ или } 2x + y - z - 2 = 0.$$

Пример 5. Составьте уравнение плоскости P , параллельной вектору $\bar{p} (2, 1, -1)$ и отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$ и $b = -2$.

Решение:

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{c} = 1.$$

Приведение его к общему знаменателю дает следующее уравнение плоскости:

$$-2cx + 3cy - 6z + 6c = 0.$$

Нормальный вектор этой плоскости $\bar{n} \{-2c; 3c; -6\}$. Из условия перпендикулярности векторов $\bar{p} \{2; 1; -1\}$ и $\bar{n} \{-2c; 3c; -6\}$ имеем $\bar{p} \cdot \bar{n} = 0$, откуда $-4c + 3c + 6 = 0$ или $c = 6$. Тогда $\bar{n} (-12; 18; -6)$, и уравнение искомой плоскости имеет вид $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1$, т. е. $2x - 3y + z = 6$.

Пример 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; -1; 4)$ и $N(3; 2; -1)$ перпендикулярно плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

Решение:

Для нахождения значений коэффициентов A, B, C запишем следующие уравнения, составляющие однородную систему уравнений:

- уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 4)$;
- условие прохождения этой плоскости через точку $N(3; 2; -1)$;
- условие перпендикулярности этой плоскости с плоскостью с нормалью $\vec{n}(1; 1; 1)$:

$$\begin{cases} A(x-2) + B(y+1) + C(z-4) = 0, \\ A + 3B - 5C = 0, \\ A + B + C = 0. \end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение при

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получается уравнение искомой плоскости:

$$4x - 3y - z - 7 = 0.$$

Пример 7. Вычислить высоту h_S пирамиды с вершинами в точках $S(0; 6; 4)$, $A(3; 5; 3)$, $B(-2; 11; -5)$, $C(1; -1; 4)$.

Решение:

Запишем уравнение грани ABC :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -2-3 & 11-5 & -5-3 \\ 1-3 & -1-5 & 4-3 \end{vmatrix} = 0; \quad 2x - y - 2z + 5 = 0.$$

Найдем расстояние от точки $S(0; 6; 4)$ до плоскости $2x - y - 2z + 5 = 0$:

$$h_S = \frac{|2 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3.$$

Пример 8. Вычислить угол между плоскостями

$$P_1: 6x + 2y - 4z + 5 = 0 \text{ и } P_2: 9x + 3y - 6z - 2 = 0.$$

Решение:

$$\overline{n_1} = \{6; 2; -4\} \perp P_1, \quad \overline{n_2} = \{9; 3; -6\} \perp P_2,$$

$$\cos \varphi = \frac{6 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot (-6)}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{9^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{84}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{126}} = 1,$$

откуда $\varphi = 0$, т. е. плоскости параллельны.

Этот вывод также следует из того, что векторы $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ коллинеарны:

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{-4}{-6}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1 (3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $a_1 = \{3; 1; -1\}$ и $a_2 = \{1; -2; 1\}$.
2. Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок $c = -5$ и перпендикулярной к вектору $l = \{-2; 1; 3\}$.
3. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

$$3x - 5y + lz - 3 = 0, \quad x + 3y + 2z + 5 = 0.$$

4. Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.
5. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M (1; -2; 0)$ и от плоскости $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

Ответы:

1. $x + 4y + 7z + 16 = 0$.
2. $2x - y - 3z - 15 = 0$.
3. 6.
4. 8 куб. ед.
5. $(0; 0; -2)$ и $(0; 0; -6\frac{4}{13})$.

Тестовые задания 3
Плоскость в пространстве

1. Плоскость $2x + y - 7 = 0$ в пространстве:

- а) $\parallel xOz$; б) $\parallel xOy$; в) $\parallel yOz$; г) $\parallel Oz$.

2. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ (1) и вектор $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ (2) называются соответственно:

а) (1) – уравнение прямой в пространстве, (2) – направляющий вектор прямой;

б) (1) – уравнение плоскости в пространстве, (2) – направляющий вектор плоскости;

в) (1) – уравнение плоскости в пространстве, (2) – нормальный вектор плоскости.

3. Среди представленных ниже уравнений укажите общее уравнение плоскости:

- а) $Ax + By + Cz + D = 0$; б) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$;
- в) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$; г) $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases}$

4. Найдите расстояние от начала координат до плоскости $2x - 6y + 3z - 14 = 0$:

- а) $d = 14$; б) $d = 7$; в) $d = 2$; г) $d = 3$.

5. Расстояние от точки $A(1, 1, 1)$ до плоскости $2x + 2y + z + 1 = 0$ равно:

- а) 1; б) 3; в) 4; г) 2.

6. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ имеет вид:

а)
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x-x_1 & x-x_2 & x-x_3 \\ y-y_1 & y-y_2 & y-y_3 \\ z-z_1 & z-z_2 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)} \frac{x-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y-y_1}{y_3-y_2} = \frac{z-z_1}{z_3-z_2}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{д)} (x_1 + x_2 + x_3)x + (y_1 + y_2 + y_3)y + (z_1 + z_2 + z_3)z = 0.$$

7. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (p, q, r)$ имеет вид:

$$\text{а)} p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1) + r(z_2 - z_1) = 0;$$

$$\text{б)} p(x - x_1) + q(y - y_1) + r(z - z_1) = 0;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г)} \frac{x-x_1}{p+x_2} = \frac{y-y_1}{q+y_2} = \frac{z-z_1}{r+z_2}; \quad \text{д)} \frac{x_2-x_1}{p} = \frac{y_2-y_1}{q} = \frac{z_2-z_1}{r}.$$

8. Плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = (p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{a}_2 = (p_2, q_2, r_2)$, соответствует уравнение:

$$\text{а)} \frac{x-x_0}{p_1+p_2} = \frac{y-y_0}{q_1+q_2} = \frac{z-z_0}{r_1+r_2}; \quad \text{б)} \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, соответствует уравнение:

а) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

б) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$; в) $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$;

г) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$; д) $\frac{x - x_0}{A} + \frac{y - y_0}{B} + \frac{z - z_0}{C} = 0$.

10. Установите, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

Варианты ответов:

а) 1) и 2); б) 1) и 3); в) 2) и 3).

11. Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется из выражения:

а) $\sin \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

б) $\cos \alpha = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$;

в) $\cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

12. Две грани куба лежат на плоскости $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x + 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

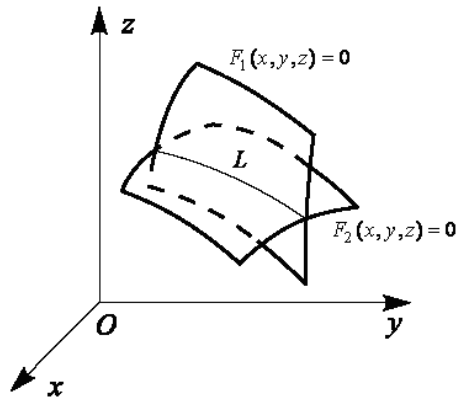
а) 6; б) 3; в) 2; г) 8.

Домашнее задание

Выполните задания 19–22 из прил. 1.

11. ПОНЯТИЕ О ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Линию в пространстве естественно рассматривать как пересечение двух поверхностей, т. е. как геометрическое место точек, принадлежащих одновременно двум поверхностям.



Если $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ – уравнения двух поверхностей, пересечением которых является данная линия L , то координаты любой точки, лежащей на линии L , удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Уравнения полученной системы называют *уравнениями линии в пространстве*.

Пример 1. Система $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ определяет в пространстве ось OX .

Пример 2. Окружность $x^2 + y^2 = 16$, получающаяся пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ плоскостью $z = 0$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases}$$

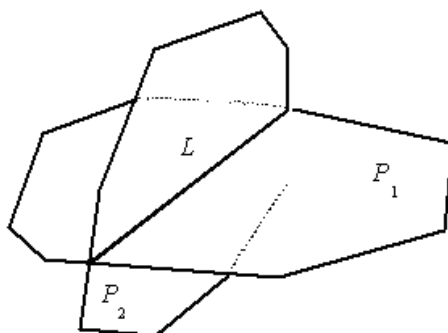
12. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

12.1. Общее уравнение прямой в пространстве. Уравнение пучка плоскостей

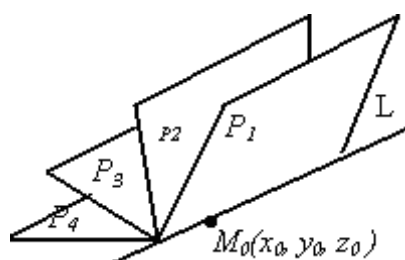
Прямую L в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей P_1 и P_2 . Соответственно L определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Данная система называется *общими уравнениями прямой L в пространстве*.



Уравнений указанного типа, определяющих одну и ту же прямую L , бесконечное множество, т. к. через прямую L можно провести бесконечное множество плоскостей.



Определение. Множество всех плоскостей, проходящих через заданную прямую L , называется *пучком плоскостей*, прямая L – *осью пучка*.

Уравнение пучка плоскостей имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Уравнением пучка плоскостей (при соответствующем выборе чисел α и β) можно определить любую плоскость, проходящую через прямую L .

Если $\alpha \neq 0$, то, полагая $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, уравнение пучка может быть записано в виде

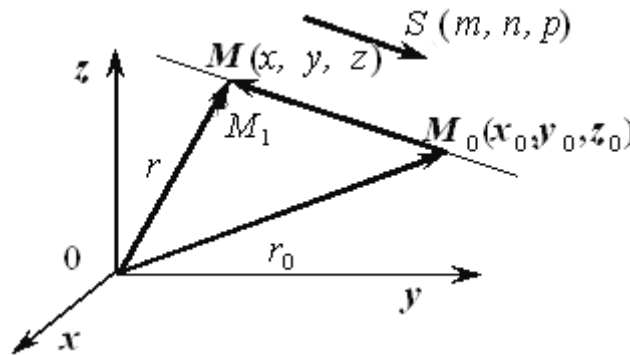
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

В таком виде уравнение пучка плоскостей более употребительно, однако оно определяет все плоскости, проходящие через прямую L , кроме

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \text{ (получаемой при } \alpha = 0 \text{)}.$$

12.2. Векторное и канонические уравнения прямой в пространстве

Положение прямой линии в пространстве можно задать различными способами. В частности, через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно данному ненулевому вектору $\vec{S}\{m, n, p\}$ можно провести единственную прямую.



Вектор \vec{S} называется направляющим вектором прямой. Обозначим через \vec{r}_0 радиус-вектор точки M_0 , а через \vec{r} — радиус-вектор произвольной точки M , лежащей на прямой. Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Очевидно, что вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{S} будут коллинеарны тогда и только тогда, когда точка M лежит на данной прямой. Это условие присуще лишь точкам, лежащим на прямой, и только этим точкам.

Отсюда следует две возможности записать уравнение прямой в пространстве:

1. Так как условие коллинеарности векторов есть условие их пропорциональности, имеем $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{S}$, или $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}$. Последнее уравнение называется *векторным уравнением* прямой линии в пространстве.

2. Так как условие коллинеарности векторов есть условие пропорциональности их соответствующих координат, имеем

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Полученные уравнения называют *каноническими уравнениями* прямой.

12.3. Параметрические уравнения прямой

Запишем векторное уравнение прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + tmi + tn\vec{j} + tp\vec{k} = \\ &= (x_0 + tm)\vec{i} + (y_0 + tn)\vec{j} + (z_0 + tp)\vec{k}. \end{aligned}$$

Примем теперь во внимание, что если два вектора равны в данном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то совпадают их координаты, т. е.

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$$

Полученные уравнения называются *параметрическими уравнениями* прямой. Здесь в качестве параметра выступает t . Придавая t различные числовые значения из $(-\infty, +\infty)$, будем получать на прямой различные точки.

Канонические уравнения прямой можно записать теперь следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Кроме того, канонические уравнения представляют систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}, \end{cases}$$

определяющих соответственно две плоскости P_1 и P_2 , пересечение которых дает прямую L , проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую направляющий вектор $\vec{S} \{m, n, p\}$.

Пример 1. Даны точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(2; -3; 1)$. Составить уравнения прямой, проходящей через $M_0(3; -1; 2)$ и параллельной вектору \vec{AB} .

Решение:

По условию дана точка $M_0(3; -1; 2)$, т. е. $x_0 = 3$, $y_0 = -1$, $z_0 = 2$.

В качестве направляющего вектора возьмем $\vec{S} = \vec{AB} = \{3; -5; -2\}$, т. е. $m = 3$, $n = -5$, $p = -2$.

Запишем канонические уравнения прямой:

$$L: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2} = t.$$

Приравняв все части равенства параметру t , получим параметрические уравнения прямой:

$$L: \begin{cases} x = 3t + 3, \\ y = -5t - 1, \\ z = -2t + 2. \end{cases}$$

Пример 2. Написать канонические и параметрические уравнения перпендикуляра L к плоскости $P: 2x - 3y + z - 7 = 0$, проходящего через точку $M_0(-1; 2; 3)$.

Решение:

По условию $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$. В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\vec{S} \{2; -3; 1\} \perp P$, тогда каноническое уравнение перпендикуляра:

$$L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1} (=t).$$

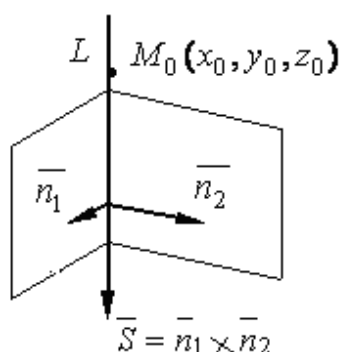
Приравняв все части последнего равенства параметру t , получим искомые параметрические уравнения прямой:

$$L: \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -3t + 2, \\ z = t + 3. \end{cases}$$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$L: \begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0, \\ 3x + y - 17z = 0. \end{cases}$$

Решение:



Требуется записать канонические уравнения этой прямой L , для чего необходимо знание точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ и направляющего вектора $\vec{S} \parallel L$. Координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ находятся из заданной системы при произвольном значении одной из координат.

В качестве направляющего вектора \vec{S} можно взять векторное произведение векторов $\vec{n}_1 \perp P_1$ и $\vec{n}_2 \perp P_2$, т. е. $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Найдем $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$. Пусть $z_0 = 0$, тогда для нахождения x_0 и y_0 получаем систему

$$\begin{cases} 2x_0 + 3y_0 = 7, \\ 3x_0 + y_0 = 0, \end{cases}$$

решая которую найдем $x_0 = -1$ и $y_0 = 3$, т. е. $M_0(-1; 3; 0)$.

Из условия задачи $\vec{n}_1 = \{2; 3; -16\} \perp P_1$ и $\vec{n}_2 = \{3; 1; -17\} \perp P_2$, поэтому

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}.$$

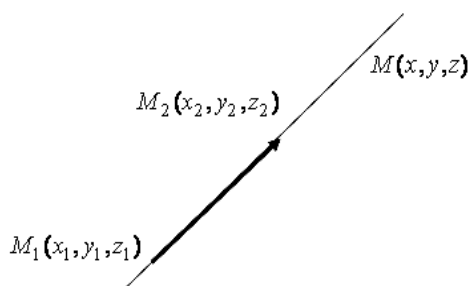
В качестве направляющего вектора возьмем $\bar{S}_1 = -\frac{1}{7}\bar{S} = \{5; 2; 1\}$.

Итак, искомые канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-0}{1}.$$

12.4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Очевидно, что через эти две точки можно провести единственную прямую. В качестве направляющего вектора этой прямой возьмем вектор $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ ($\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$), а в качестве фиксированной точки можно взять любую из точек M_1 или M_2 .



Пусть это будет точка M_1 . Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2; -5; 1)$ и $M_2(-1; 1; 2)$.

Решение:

В качестве точки M_0 можно взять любую из двух данных точек, пусть для определения $M_0 = M_1$. За направляющий вектор возьмем вектор $\bar{S} = \overline{M_1M_2} = \{ \underbrace{x_2 - x_1}_m, \underbrace{y_2 - y_1}_n, \underbrace{z_2 - z_1}_p \} = \{-3; 6; 1\}$.

Запишем канонические уравнения прямой:

$$L: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{1} \quad (=t),$$

откуда

$$L: \begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = 6t - 5, \\ z = t + 1 \end{cases}$$

и есть искомые параметрические уравнения.

12.5. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Определение. *Углом между двумя прямыми называется наименьший угол между их направляющими векторами.*

Очевидно, что если

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

то угол φ между прямыми L_1 и L_2 можно вычислить из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

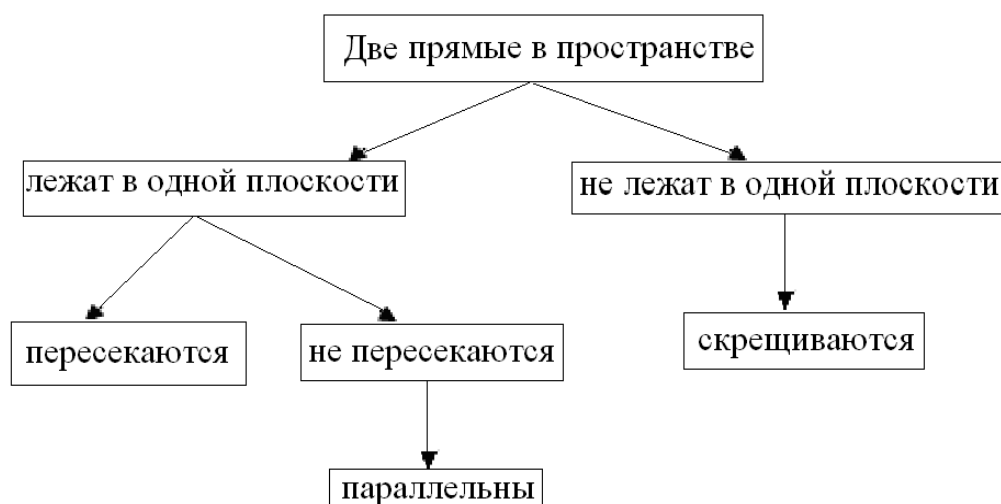
Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то их направляющие векторы \vec{S}_1 и \vec{S}_2 коллинеарны, следовательно, *условие параллельности* двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$, следовательно, *условие перпендикулярности* двух прямых:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Заметим, что в силу рассмотренных ранее теорий, полученные условия являются необходимыми и достаточными условиями соответственно параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.



Все возможные случаи расположения двух прямых

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

в пространстве представлены в таблице ниже.

Геометрическое условие для прямых L_1 и L_2	Возможная векторная форма представления
Коллинеарность	$\vec{S}_1 = \lambda \vec{S}_2, \left(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = 0 \right)$, или $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, но $\overline{M_1 M_2} \neq \lambda \overline{S_1} (\neq \lambda \overline{S_2})$.
Ортогональность	$(\vec{S}_1, \vec{S}_2) = 0$, или $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$
Совпадение	$\vec{S}_1 = \lambda \vec{S}_2, \left(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = 0 \right)$ и $\overline{M_1 M_2} = \lambda \overline{S_1} (= \lambda \overline{S_2})$
Пересечение	$(\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2) = 0$, т. е. $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$
Скрещивание	$(\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2) \neq 0$

Таким образом:

1. Прямые

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{3} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x}{6} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-2}{9}$$

будут параллельны, т. к. их направляющие векторы $\vec{S}_1 = \{2; 4; 3\}$ и $\vec{S}_2 = \{6; 12; 9\}$ удовлетворяют условию $\vec{S}_1 = \lambda \vec{S}_2: \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{3}{9}$.

2. Прямые $L_3: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ и $L_4: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}$

не являются параллельными (их направляющие векторы не коллинеарны), и для них выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0:$$

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-(-1) \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, прямые L_3 и L_4 пересекаются.

3. Прямые

$$L_5: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad L_6: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

не являются параллельными (их направляющие векторы не коллинеарны), и для них не выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0:$$

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, прямые L_5 и L_6 – скрещиваются.

Пример 1. Определить, при каком значении параметра λ прямые $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $L_2: \frac{x-3}{\lambda} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ пересекаются.

Решение:

Первая прямая проходит через точку $M_1(-2; 0; 1)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S_1}(2; -3; 4)$, вторая проходит через точку $M_2(3; 1; 7)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S_2}(\lambda; 4; 2)$. Вектор $\overline{M_1M_2}(5; 1; 6)$.

Условие пересечения прямых $(\overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{S_1} \overrightarrow{S_2}) = 0$.

Имеем

$$(\overline{M_1M_2} \overline{S_1} \overline{S_2}) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ \lambda & 4 & 2 \end{vmatrix} = 22\lambda - 66 = 0,$$

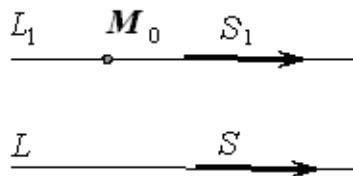
т. е. $\lambda = 3$.

Пример 2. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; -1; 2)$ и параллельной прямой

$$L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

Решение:

Направляющий вектор данной прямой L есть $\overline{S}\{2; -1; -1\}$. Искомая прямая L_1 параллельна данной прямой L , значит ее направляющий вектор $\overline{S_1} = \overline{S}$.



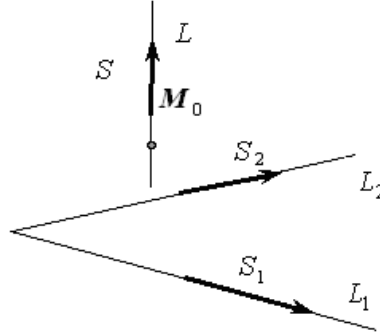
Фиксированная точка $M_0(1; -1; 2)$ лежит на искомой прямой. Ее канонические уравнения:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Пример 3. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; 0; -1)$ и перпендикулярной к двум данным прямым:

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$$

Решение:



В качестве направляющего вектора искомой прямой L возьмем вектор

$$\bar{S} = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 3\bar{k}.$$

За направляющий вектор возьмем коллинеарный вектор $\bar{S}_1 = \frac{1}{3}\bar{S} = (1; 0; 1).$

Канонические уравнения прямой L имеет вид

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}.$$

12.6. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между прямыми в пространстве

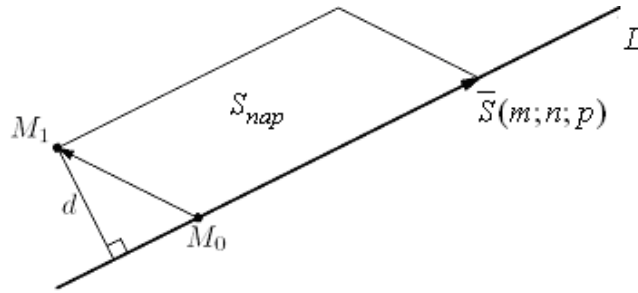
Найдем расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямой L :

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Искомое расстояние равно высоте h параллелограмма, построенного на векторах $\bar{S}(m; n; p)$ и $\overline{M_0M_1}$, где точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежит на данной прямой.

Так как площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения указанных векторов $S_{\text{пар}} = |\overline{M_0M_1} \times \overline{S}|$, а длина основания параллелограмма, перпендикулярного искомой высоте, равна $|\overline{S}|$, то

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \overline{S}|}{|\overline{S}|}.$$



Пример 1. Найти расстояние от точки $M_1 (9; 6; 5)$ до прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{1}$.

Решение:

Точка $M_0 (3; 2; 4)$ лежит на прямой, поэтому $\overline{M_0M_1} (6; 4; 1)$:

$$\overline{M_0M_1} \times \overline{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2; -4; 4), \quad |\overline{M_0M_1} \times \overline{S}| = 6,$$

$$|\overline{S}| = 3 \text{ и } d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \overline{S}|}{|\overline{S}|} = 2.$$

Далее, найдем расстояние между двумя прямыми:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Рассмотрим точки $M_1 (x_1; y_1; z_1)$ и $M_2 (x_2; y_2; z_2)$, лежащие на этих прямых, а также направляющие вектора $\overline{S}_1 (m_1; n_1; p_1)$ и $\overline{S}_2 (m_2; n_2; p_2)$ данных прямых.

Способ вычисления расстояний между двумя прямыми зависит от взаимного расположения направляющих векторов.

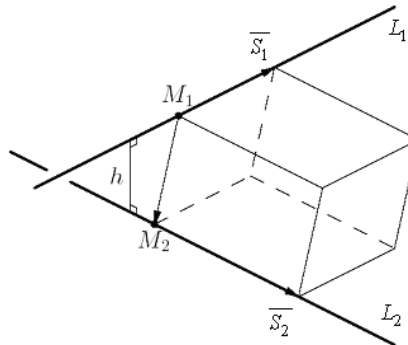
Рассмотрим два случая.

Случай 1. Векторы $\overline{S_1} (m_1; n_1; p_1)$ и $\overline{S_2} (m_2; n_2; p_2)$ коллинеарны. В этом случае прямые L_1 и L_2 либо параллельны, либо совпадают, и расстояние между ними равно расстоянию от точки, лежащей на одной из них, до другой (например, от точки $M_1 (x_1; y_1; z_1)$ до прямой L_2).

Согласно предыдущей задаче

$$d = \frac{|\overline{M_2 M_1} \times \overline{S_2}|}{|\overline{S_2}|}.$$

Случай 2. Векторы $\overline{S_1} (m_1; n_1; p_1)$ и $\overline{S_2} (m_2; n_2; p_2)$ не коллинеарны. Тогда прямые L_1 и L_2 либо пересекаются ($d = 0$), либо скрещиваются. В последнем случае искомое расстояние равно длине общего перпендикуляра данных скрещивающихся прямых, что равно высоте h параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1 M_2}$, $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$.



Поскольку объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения указанных векторов $V = \left| \left(\overline{M_1 M_2} \overline{S_1} \overline{S_2} \right) \right|$, а основание, перпендикулярное искомой высоте, является параллелограммом, построенным на векторах $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$, т. е. $S_{\text{пар}} = |\overline{S_1} \times \overline{S_2}|$, то получаем ответ

$$d = \frac{V}{S_{\text{пар}}} = \frac{\left| \left(\overline{M_1 M_2} \overline{S_1} \overline{S_2} \right) \right|}{|\overline{S_1} \times \overline{S_2}|}.$$

Пример 2. Найти расстояние между двумя прямыми

$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{2} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-4}{-6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-4}.$$

Решение:

Первая прямая проходит через точку $M_1(1; 2; 5)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S}_1(3; -1; 2)$, вторая проходит через точку $M_2(4; -1; 7)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S}_2(-6; 2; -4)$. Вектор $\overline{M_1M_2}(3; -3; 2)$, и

$$(\overline{M_1M_2} \quad \overline{S}_1 \quad \overline{S}_2) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

и т. к. $\overline{S}_2 = -2\overline{S}_1$, то данные прямые параллельны.

Найдем расстояние между параллельными прямыми как расстояние от точки $M_1(1; 2; 5)$ до прямой L_2 :

$$\overline{M_1M_2} \times \overline{S}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (8; 0; -12), \quad |\overline{M_1M_2} \times \overline{S}| = 4\sqrt{13},$$

$$|\overline{S}_2| = 2\sqrt{14} \quad \text{и} \quad d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \overline{S}|}{|\overline{S}|} = \frac{4\sqrt{13}}{2\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{52}{14}} = \sqrt{\frac{26}{7}}.$$

Пример 3. Найти расстояние между двумя прямыми

$$L_1: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -4 + 2t, \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = 4 + 8t, \\ y = -2 + 6t, \\ z = 6 + 4t. \end{cases}$$

Решение:

Первая прямая проходит через точку $M_1(3; -4; 5)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S}_1(1; 2; -2)$, вторая проходит через точку $M_2(4; -2; 6)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S}_2(8; 6; 4)$.

Вектор $\overline{M_1M_2}$ (1; 2; 1), и

$$(\overline{M_1M_2} \ \overline{S_1} \ \overline{S_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 8 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -30,$$

$$|(\overline{M_1M_2} \ \overline{S_1} \ \overline{S_2})| = 30.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то данные прямые скрещиваются:

$$\overline{S_1} \times \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (20; -20; -10), \quad |\overline{S_1} \times \overline{S_2}| = 30 \text{ и}$$

$$d = \frac{|(\overline{M_1M_2} \ \overline{S_1} \ \overline{S_2})|}{|\overline{S_1} \times \overline{S_2}|} = 1.$$

Практическая часть 7

Прямая в пространстве

Пример 1. Приведем к каноническому виду уравнения прямой

$$L: \begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Требуется записать канонические уравнения этой прямой L , для чего необходимо знание точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ и направляющего вектора $\overline{S} \parallel L$.

Координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ находятся из заданной системы при произвольном значении одной из координат.

Пусть $z_0 = 0$, тогда для нахождения x_0 и y_0 получаем систему

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = -3, \\ 3x_0 + 2y_0 = -2, \end{cases}$$

решая которую, найдем $x_0 = -4$ и $y_0 = 5$, т. е. $M_0(-4; 5; 0)$.

В качестве направляющего вектора \vec{S} можно взять векторное произведение векторов $\vec{n}_1 \perp P_1$ и $\vec{n}_2 \perp P_2$, т. е. $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Из условия задачи $\vec{n}_1 = \{2; 1; -5\} \perp P_1$, и $\vec{n}_2 = \{3; 2; -4\} \perp P_2$, поэтому

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Итак, искомые канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+4}{6} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z-0}{1}.$$

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 7 = 0$ и $2x - y - z + 5 = 0$, перпендикулярно к плоскости $4x - 3y + 2z - 1 = 0$.

Решение:

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$\alpha (x + 2y + 3z - 7) + \beta (2x - y - z + 5) = 0,$$

$$\text{или } (\alpha + 2\beta)x + (2\alpha - \beta)y + (3\alpha - \beta)z - 7\alpha + 5\beta = 0.$$

Среди плоскостей этого пучка выберем ту, которая перпендикулярна плоскости $4x - 3y + 2z - 1 = 0$.

Для нее должно выполняться условие

$$4(\alpha + 2\beta) - 3(2\alpha - \beta) + 2(3\alpha - \beta) = 0, \text{ или } 4\alpha + 9\beta = 0,$$

$$\text{откуда } \beta = -\frac{4}{9}\alpha.$$

Подставляя полученное соотношение в уравнение пучка плоскостей, имеем

$$9\alpha(x + 2y + 3z - 7) - 4\alpha(2x - y - z + 5) = 0,$$

что после сокращения на $\alpha \neq 0$ дает искомое уравнение

$$x + 22y + 31z - 83 = 0.$$

Пример 3. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x = 8 + 3t, \\ y = -7 - 5t, \\ z = 11 + 6t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 9 + 7t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

пересекаются, и найти точку их пересечения.

Решение:

Первая прямая проходит через точку $M_1 (8; -7; 11)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S_1} (3; -5; 6)$, вторая проходит через точку $M_2 (9; 1; 3)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S_2} (7; -2; 4)$. Вектор $\overline{M_1M_2} (1; 8; -8)$, и

$$(\overline{M_1M_2} \ \overline{S_1} \ \overline{S_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 3 & -5 & 6 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 30 \\ 2 & 2 & 60 \end{vmatrix} = 0,$$

и прямые лежат в одной плоскости.

Поскольку $\overline{S_2}$ и $\overline{S_1}$ не коллинеарны (их координаты непропорциональны), то прямые пересекаются.

Чтобы найти точку пересечения прямых, приравняем выражения для координат, предварительно обозначив параметры разными буквами:

$$\begin{cases} 8 + 3t = 9 + 7s, \\ -7 - 5t = 1 - 2s, \\ 11 + 6t = 3 + 4s, \end{cases}$$

откуда после преобразования $[S_1 \rightarrow 2S_1 - S_3]$ имеем

$$\begin{cases} 5 = 15 + 10s, \\ -7 - 5t = 1 - 2s, \\ 11 + 6t = 3 + 4s, \end{cases}$$

или $s = -1$.

Подставляя полученное значение в уравнение второй прямой, находим координаты точки пересечения $M_0 (2; 3; -1)$.

Пример 4. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ 3x - 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Найдем направляющие вектора данных прямых:

$$\vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}.$$

Тогда

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \frac{7 \cdot 7 - 5 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{\sqrt{49 + 25 + 1} \sqrt{49 + 16 + 1}} = \frac{28}{15\sqrt{22}} \approx 0,3127.$$

Этому значению $\cos \varphi$ соответствует угол $\varphi \approx 71^\circ 48'$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $2x + y - z + 1 = 0$, $x + y + 2z + 1 = 0$ параллельно отрезку, ограниченному точками $M_1(2; 5; -3)$, $M_2(3; -2; -2)$.
2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$:

а) и через точку $M_1(4; -2; -3)$;

б) параллельно оси Ox ;

в) параллельно оси Oy ;

г) параллельно оси Oz .

3. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}.$$

4. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекает две прямые

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

5. Вычислить расстояние между прямыми

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{6} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{0} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

6. Как расположены прямые

$$\begin{cases} x = -3t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 + 5t, \\ y = 1 + 13t, \\ z = 1 + 11t. \end{cases}$$

Ответы:

1. $9x + 7y + 8z + 7 = 0$.
2. а) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$;
 б) $y + z - 18 = 0$;
 в) $x + z - 3 = 0$;
 г) $x - y + 15 = 0$.
3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$.
4. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$.
5. 4.
6. Пересекаются, точка пересечения $N(1; 1; 1)$.

Тестовые задания 4 *Прямая в пространстве*

1. Уравнения $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n};$ (1)

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases};$$
 (2)

и вектор $\vec{S} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ (3)

называются соответственно:

а) (1) – параметрическое уравнение прямой в пространстве, (2) – каноническое уравнение прямой в пространстве, (3) – направляющий вектор прямой;

б) (1) – каноническое уравнение прямой в пространстве, (2) – параметрическое уравнение прямой в пространстве, (3) – нормальный вектор прямой – вектор ортогональный к прямой;

в) (1) – каноническое уравнение прямой в пространстве, (2) – параметрическое уравнение прямой в пространстве, (3) – направляющий вектор прямой – вектор коллинеарный прямой.

2. Если прямая задана параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}, \text{ то ее каноническое уравнение имеет вид:}$$

$$\text{а) } \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}; \quad \text{б) } \frac{x + x_0}{p} = \frac{y + y_0}{q} = \frac{z + z_0}{r};$$

$$\text{в) } p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0;$$

$$\text{г) } \frac{x}{x_0 + p} = \frac{y}{y_0 + q} = \frac{z}{z_0 + r};$$

$$\text{д) } (x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = pqrt.$$

3. Прямая совпадает с осью Ox . Ее канонические уравнения имеют вид:

$$\text{а) } \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}; \quad \text{б) } \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}; \quad \text{в) } \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}; \quad \text{г) } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

4. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеет вид:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \quad \text{г) } \frac{x}{x_2 - x_1} = \frac{y}{y_2 - y_1} = \frac{z}{z_2 - z_1}.$$

5. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (p, q, r)$, имеет вид:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \frac{x}{p+x_0} = \frac{y}{q+y_0} = \frac{z}{r+z_0};$$

$$\text{в) } \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r};$$

$$\text{г) } p(x-x_0) + q(y-y_0) + r(z-z_0) = 0.$$

6. Угол между прямыми $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и

$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ определяется из выражения:

$$\text{а) } \cos \alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}};$$

$$\text{б) } \cos \alpha = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2;$$

$$\text{в) } \sin \alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

7. Прямые $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{r}$ и $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{8}$ перпендикулярны, если:

$$\text{а) } r = \frac{16}{3}; \quad \text{б) } r = -6; \quad \text{в) } r = 6; \quad \text{г) } r = -\frac{16}{3}.$$

8. Прямые $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ скрещиваются, если:

$$\text{а) } \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \text{б) } \frac{x_1-x_2}{p_2} = \frac{y_1-y_2}{q_2} = \frac{z_1-z_2}{r_2};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

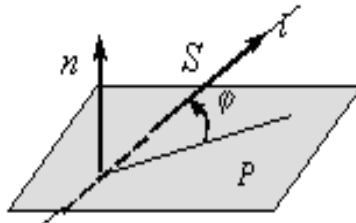
$$\text{д) } \frac{x_2 - x_1}{p_1} = \frac{y_2 - y_1}{q_1} = \frac{z_2 - z_1}{r_1}.$$

Домашнее задание

Выполните задания 23–25 из прил. 1.

13. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость P задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, следовательно, нормаль к ней $\vec{n} \{A; B; C\}$.

Пусть прямая задана каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

тогда направляющий вектор прямой $\vec{s} \{m; n; p\}$.

В силу определения, если φ – угол между прямой и плоскостью, то

$$\cos(\bar{n}; \bar{S}) = \sin \varphi = \pm \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| |\bar{S}|} = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Так как $\sin \varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$ неотрицателен, то

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Пример 1. Вычислить угол между прямой $L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-1}{-3}$ и плоскостью $P: 6x - 3y + 2z = 0$.

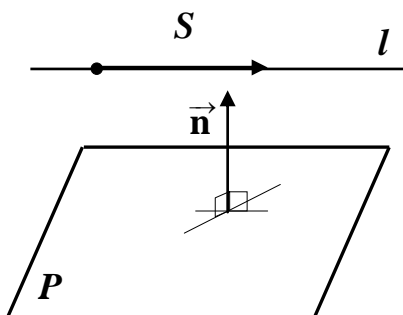
Решение:

Из данных уравнений имеем направляющий вектор $\bar{S} = \{4; 12; -3\}$ и нормальный вектор $\bar{n} = \{6; -3; 2\}$ плоскости P . По полученной формуле для искомого угла имеем

$$\sin \varphi = \pm \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| |\bar{S}|} = \frac{|4 \cdot 6 + 12 \cdot (-3) + (-3) \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{18}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{49}} = \frac{18}{91},$$

т. е. $\varphi = \arcsin \frac{18}{91}$.

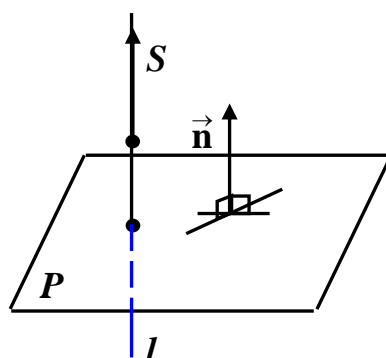
Запишем условие параллельности прямой и плоскости.



Если прямая параллельна плоскости, то ее направляющий вектор \bar{S} перпендикулярен нормали \bar{n} , следовательно, $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, значит, условие параллельности прямой и плоскости:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Запишем условие перпендикулярности прямой и плоскости.



Если прямая перпендикулярна плоскости, то ее направляющий вектор \vec{S} коллинеарен нормали \vec{n} к плоскости, следовательно, условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Запишем условие принадлежности прямой и плоскости. Во-первых, прямая и плоскость должны быть параллельны, т. е. $\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$. Во-вторых, точка $M(x_0; y_0; z_0)$ должна лежать на плоскости P , т. е. должно выполняться условие $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Совокупность этих условий и задает условие принадлежности.

Все возможные расположения прямой и плоскости приведены в таблице ниже.

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность прямой плоскости	$\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$ или $Am + Bn + Cp = 0$, НО $Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0$
Пересечение прямой и плоскости	$Am + Bn + Cp \neq 0$
Ортогональность прямой к плоскости	$\vec{S} = \lambda \vec{n}$, или $\vec{S} \times \vec{n} = 0$, или $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$
Принадлежность прямой плоскости	$\begin{cases} \vec{S} \cdot \vec{n} = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$

Найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости. Для начала запишем параметрические уравнения прямой L :

$$\left. \begin{aligned} x &= mt + x_0 \\ y &= nt + y_0 \\ z &= pt + z_0 \end{aligned} \right\}$$

Подставим выражения x , y и z в уравнение плоскости P :

$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0,$$

или

$$(Am + Bn + Cp)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

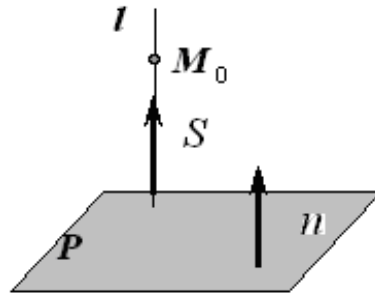
Если L не параллельна P , т. е. $Am + Bn + Cp \neq 0$, то тогда

$$t = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрическое уравнение прямой, получим искомую точку пересечения.

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1; 1; 2)$ перпендикулярно к данной плоскости P : $x - 2y - z + 5 = 0$.

Решение:

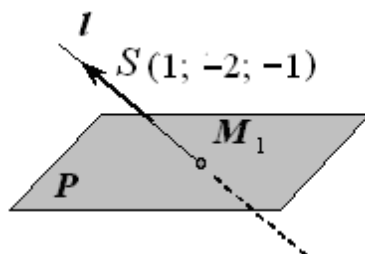


В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять нормаль к данной плоскости $\vec{n}(1; -2; -1)$. Тогда искомая прямая L имеет канонические уравнения

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Пример 3. Найти координаты точки пересечения прямой L :
 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ и плоскости $P: x + 2y + 3z - 3 = 0$.

Решение:



От канонических уравнений прямой перейдем к ее параметрическому:

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t + 1, \\ z = -t + 2. \end{cases}$$

Выясним, при каком значении параметра t данная прямая и плоскость пересекаются. Для этого найденные значения x , y и z подставим в уравнение плоскости P :

$$(t + 1) + 2(-2t + 1) + 3(-t + 2) - 3 = 0.$$

Отсюда следует, что $t = 1$, т. е. при значении параметра $t = 1$ прямая и плоскость пересекаются.

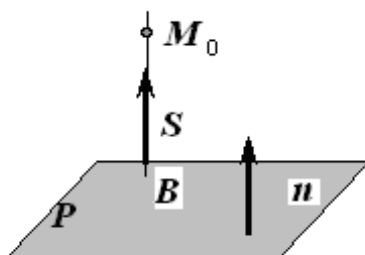
Подставив $t = 1$ в параметрические уравнения прямой, получим координаты искомой точки:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1, \\ z_1 = 1. \end{cases}$$

Итак, $M_1(2; -1; 1)$.

Пример 4. Найти проекцию точки $M_0(4; -3; 1)$ на плоскость $P: x + 2y - z - 3 = 0$.

Решение:



Напишем канонические уравнения прямой L , проходящей через точку $M_0(4; -3; 1)$ перпендикулярно плоскости P , т. е. имеющей направляющий вектор $\vec{S} = \vec{n} = \{1; 2; -1\}$:

$$l: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1} (=t),$$

откуда получаем параметрические уравнения прямой l :

$$l: \begin{cases} x = t + 4, \\ y = 2t - 3, \\ z = -t + 1. \end{cases}$$

Так как искомая проекция точки B лежит в плоскости P , то, подставляя полученные x , y и z в уравнение плоскости, получим

$$t + 4 + 2(2t - 3) - (-t + 1) - 3 = 0, \text{ или } 6t - 6 = 0,$$

т. е. $t = 1$.

Подставляя значение t в систему, получаем ответ: $B(5; -1; 0)$.

Пример 5. Исследовать взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 4 + 3t, \\ y = 6 + 4t, \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

и плоскости $2x - 3y + 5z - 10 = 0$.

Решение:

Нормаль к плоскости $\vec{n}(2; -3; 5)$, направляющий вектор прямой $\vec{S}(3; 4; 2)$, и $\vec{n} \cdot \vec{S} = |6 - 12 + 10| = 4 \neq 0$, откуда следует, что прямая и плоскость пересекаются.

Найдем точку пересечения:

$$2(4 + 3t) - 3(6 + 4t) + 5(5 + 2t) - 10 = 0, \quad 4t + 5 = 0,$$

откуда $t = -\frac{5}{4}$.

Подставляя полученное значение параметра в уравнение прямой, находим координаты точки пересечения $M\left(\frac{1}{4}; 1; \frac{5}{2}\right)$.

Практическая часть 8

Прямая и плоскость в пространстве

Пример 1. Найти координаты точки A , равноудаленной от точек B и C , если $A(x; 0; 0)$, $B(-2; -4; -6)$, $C(-1; -2; -3)$.

Решение:

Найдем расстояние между точками:

$$AB = \sqrt{(-2-x)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 56},$$

$$AC = \sqrt{(-1-x)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 14}.$$

Так как по условию задачи $AB = AC$, то $\sqrt{x^2 + 4x + 56} = \sqrt{x^2 + 2x + 14}$ или $x^2 + 4x + 56 = x^2 + 2x + 14$, $2x = -42$, $x = -21$.

Таким образом, $A(-21; 0; 0)$.

Пример 2. Найти точку B , симметричную точке $A(1; 2; -4)$ относительно плоскости $3x - 2y + z - 23 = 0$.

Решение:

Напишем уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно заданной плоскости: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{1} (=t)$ или

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -4 + t. \end{cases}$$

Найдем точку пересечения этой прямой с плоскостью:

$$3 \cdot (1 + 3t) - 2 \cdot (2 - 2t) + (-4 + t) - 23 = 0, \quad 14t - 28 = 0, \quad t = 2.$$

Точка $C(7; -2; -2)$ – точка пересечения прямой и плоскости – является серединой отрезка AB , поэтому

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \text{ откуда } x_B = 2x_C - x_A = 13.$$

Аналогично,

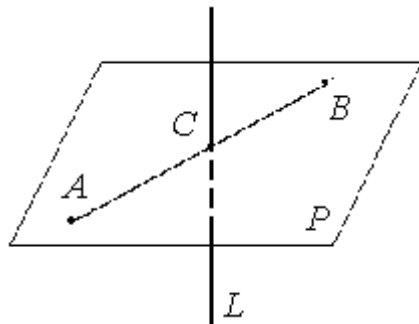
$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \text{ откуда } y_B = 2y_C - y_A = -6,$$

$$z_C = \frac{z_A + z_B}{2}, \text{ откуда } z_B = 2z_C - z_A = 0.$$

Итак, $B(13; -6; 0)$.

Пример 3. Найти точку B , симметричную точке $A(3; -2; 5)$ относительно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+9}{1} = \frac{z+2}{3}$.

Решение:



Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -2; 5)$ перпендикулярно заданной прямой:
 $2 \cdot (x-3) + (y+2) + 3 \cdot (z-5) = 0$, или $2x + y + 3z - 19 = 0$.

Учитывая, что параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -9 + t, \\ z = -2 + 3t, \end{cases}$$

найдем точку пересечения прямой с плоскостью:

$$2 \cdot (3 + 2t) + (-9 + t) + 3 \cdot (-2 + 3t) - 19 = 0, \quad 14t = 28, \quad t = 2.$$

Полученная точка пересечения $C(7; -7; 4)$ является серединой отрезка AB , поэтому $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$, откуда $x_B = 2x_C - x_A = 11$. Аналогично, $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$, откуда $y_B = 2y_C - y_A = -12$, $z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$, $\Rightarrow z_B = 2z_C - z_A = 3$.

Итак, $B(11; -12; 3)$.

Пример 4. Даны координаты точек: $A(2; 0; 3)$; $B(-3; 4; 0)$; $C(6; -3; 8)$. Найти: 1) периметр $\triangle ABC$; 2) угол $\angle BCA$; 3) площадь $\triangle ABC$; 4) уравнение прямой AB ; 5) уравнение плоскости ABC .

Решение:

Составим вектора:

$$\overrightarrow{AB}\{-5; 4; -3\}; \overrightarrow{AC}\{4; -3; 5\}; \overrightarrow{BC}\{9; -7; 8\}.$$

Найдем длины сторон треугольника:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-3)^2} = 7; |\overline{AC}| = 7; |\overline{BC}| = \sqrt{194} = 13,9,$$

т. е. периметр равен $P = 7 + 7 + 13,3 = 27,3$.

Для нахождения $\angle BCA$ воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$\cos \angle ACB = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{-5 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 5}{7 \cdot 7} = -\frac{47}{49} = -0,96,$$

т. е. $\angle ACB = 177,6^\circ$.

Площадь $\triangle ABC$ определяется с учетом геометрического смысла векторного произведения: $S = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

Векторное произведение

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11\bar{i} + 13\bar{j} - \bar{k},$$

следовательно,

$$S = \frac{1}{2} |11\bar{i} + 13\bar{j} - \bar{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{11^2 + 13^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{291} = 17,1 \text{ ед}^2.$$

Уравнение прямой AB :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}, \text{ или } \frac{x - 2}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z - 3}{-3}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки A , B и C имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - 2 & y & z - 3 \\ -5 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$11 \cdot (x - 2) + 13y - (z - 3) = 0,$$

и, следовательно, общее уравнение плоскости:

$$11x + 13y - z - 19 = 0.$$

Пример 5. Даны координаты четырех точек $A(1; -2; -2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(1; 0; -1)$ и $D(0; -1; -1)$:

- 1) докажите, что эти точки не лежат в одной плоскости;
- 2) найдите уравнение плоскости ABC ;
- 3) найти уравнение прямой AB ;
- 4) площадь треугольника ABC ;
- 5) уравнение и длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D на основание ABC ;
- 6) координаты точки K – основания высоты H ;
- 7) угол между ребром DA и основанием ABC и угол между гранями ABC и ADC ;
- 8) объем пирамиды.

Решение:

1. $\overrightarrow{AB} = \{0; 1; 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0; 2; 1\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-1; 1; 1\}$, поэтому

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

т. е. векторы некомпланарны, и точки не лежат в одной плоскости.

2. Воспользуемся уравнением плоскости ABC как плоскости, проходящей через три точки.

Имеем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или } x = 1.$$

Плоскость ABC , имеющая уравнение $x = 1$, параллельна плоскости YOZ .

2. Уравнение прямой AB :

$$AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}, \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{0},$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t - 2, \\ z = -2. \end{cases}$$

4. Площадь треугольника ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|, \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ ед}^2.$$

5. Уравнение и длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D на основание ABC , и объем пирамиды.

Вектор, перпендикулярный плоскости ABC , имеет координаты $\vec{n} (1; 0; 0)$, что следует из уравнения плоскости. Этот вектор будет направляющим вектором высоты H . С учетом того, что эта высота проходит через точку D , получаем

$$DK: \quad \frac{x - x_D}{1} = \frac{y - y_D}{0} = \frac{z - z_D}{0}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y + 1}{0} = \frac{z + 1}{0},$$

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -1, \\ z = -1. \end{cases}$$

Чтобы найти длину высоты, найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \text{ ед}^3.$$

Из геометрии известно, что $V = \frac{1}{3} S_{ABC} H$, откуда получаем

$$\frac{1}{3} S_{ABC} H = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6} H = \frac{1}{6}, \quad H = 1 \text{ ед}.$$

6. Координаты точки K – основания высоты H . Из условия пересечения высоты

$$DK: \begin{cases} x = t, \\ y = -1, \\ z = -1 \end{cases}$$

и плоскости ABC : $x = 1$, получаем координаты точки $K (1; -1; -1)$.

7. Угол между ребром DA и основанием ABC и угол между гранями ABC и ADC :

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{|-1|}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha \approx 35^\circ.$$

Угол между гранями ABC и ADC будет равен углу между нормальными к этим плоскостям. Найдем уравнение плоскости ADC и координаты вектора нормали:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y+2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z+2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y+2) - 2 \cdot (z+2) = 0, \quad -x + y - 2z - 1 = 0 \quad \text{или}$$

$$x - y + 2z + 1 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{1; -1; 2\}.$$

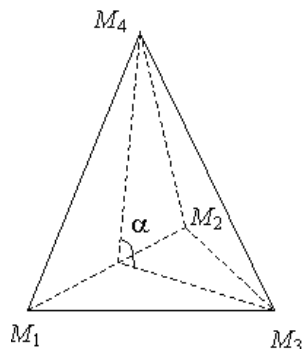
$$\text{Тогда } \cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \text{и } \beta \approx 24^\circ.$$

Пример 6. Даны вершины треугольной пирамиды $M_1 (4; -2; 1)$, $M_2 (7; -1; 5)$, $M_3 (5; -3; 2)$, $M_4 (1; -1; 1)$.

Найти:

- 1) уравнения граней $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$;
- 2) угол α между гранями $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$;
- 3) уравнение ребра M_4M_3 ;
- 4) угол β между ребром M_4M_3 и гранью $M_1M_2M_4$;
- 5) уравнение высоты M_4H , опущенной из вершины M_4 на грань $M_1M_2M_3$;
- 6) угол γ между высотой M_4H и ребром M_4M_3 ;
- 7) основание высоты M_4H ;
- 8) длину высоты M_4H .

Решение:



1. а) Воспользуемся уравнением плоскости $M_1M_2M_3$ как плоскости, проходящей через 3 точки.

Имеем

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или $5(x-4) + (y+2) - 4(z-1) = 0$.

Итак, уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ имеет вид $5x + y - 4z - 14 = 0$;

б) аналогично составим уравнение грани $M_1M_2M_4$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad -4(x-4) - 12(y+2) + 6(z-1) = 0,$$

$$-4x - 12y + 6z - 14 = 0 \quad \text{или} \quad 2x + 6y - 3z + 7 = 0.$$

Итак, уравнение плоскости $M_1M_2M_4$ имеет вид $2x + 6y - 3z + 7 = 0$.

2. Угол α между гранями $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$ – это двугранный угол между плоскостями $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$. Он находится как угол между их нормальными векторами $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{5 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{25 + 1 + 16} \cdot \sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{28}{7\sqrt{42}} = \frac{4}{\sqrt{42}} = \frac{2\sqrt{42}}{21},$$

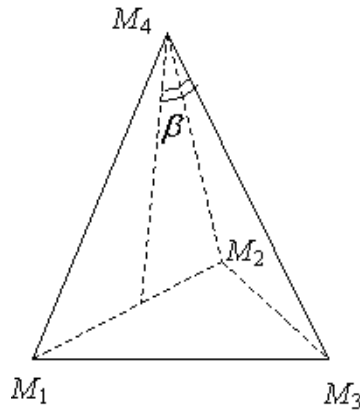
$$\alpha = \arccos \frac{2\sqrt{42}}{21} \approx 51,89^\circ.$$

3. Уравнение ребра M_4M_3 – это уравнение прямой, проходящей через точки M_4 , M_3 .

Имеем

$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y+1}{-3+1} = \frac{z-1}{2-1}$ или $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ – канонические уравнения прямой M_4M_3 .

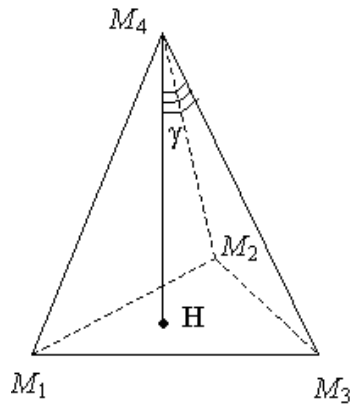
В полученном уравнении $\overline{S_1}(4; -2; 1)$ – направляющий вектор прямой M_4M_3 .



4. Угол β между ребром M_4M_3 и гранью $M_1M_2M_4$ – это угол между прямой M_4M_3 и плоскостью (гранью) $M_1M_2M_4$, который определяется следующим образом:

$$\sin \beta = \frac{\left| \overline{S_1} \cdot \overline{n_2} \right|}{\left| \overline{S_1} \right| \cdot \left| \overline{n_2} \right|} = \frac{\left| 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 6 + 1 \cdot (-3) \right|}{\sqrt{16 + 4 + 1} \cdot \sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{\left| -7 \right|}{7\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{21},$$

$$\beta = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{21} \approx 12,60^\circ.$$



5. Уравнение высоты, опущенной из вершины M_4 на грань $M_1M_2M_3$ – это уравнение прямой M_4H , перпендикулярной плоскости (границ) $M_1M_2M_3$. Канонические уравнения прямой M_4H имеют вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-4},$$

где $\overline{S_2} = \overline{n_1} = \{5; 1; 4\}$.

6. Угол γ между высотой M_4H и ребром M_4M_3 – это угол между прямыми M_4H и M_4M_3 , который найдем по формуле

$$\cos \gamma = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{|\overline{S_1}| \cdot |\overline{S_2}|} = \frac{5 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1}{\sqrt{16 + 4 + 1} \cdot \sqrt{25 + 1 + 16}} = \frac{14}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{42}} = \frac{14}{21\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\gamma = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 61,87^\circ.$$

7. Основание высоты M_4H (точка H) – это точка пересечения прямой M_4H и плоскости (грани) $M_1M_2M_3$. Преобразуем канонические уравнения прямой M_4H к параметрическому виду:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-4} = (t),$$

откуда

$$\begin{cases} x = 5t + 1, \\ y = t - 1, \\ z = -4t + 1. \end{cases}$$

Тогда точка пересечения находится из уравнения $5 \cdot (5t + 1) + (t - 1) - 4 \cdot (-4t + 1) - 14 = 0$, $42t - 14 = 0$, откуда $t = \frac{1}{3}$.

Следовательно, $H \left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right)$.

8. Длина высоты M_4H – это длина вектора $\overline{M_4H}$.

$$\overline{M_4H} = \left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3} \right), \text{ и } |\overline{M_4H}| = \sqrt{\frac{25 + 1 + 16}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0 (2; -3; -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 (1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

3. При каких значениях A и D прямая $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

4. Убедившись, что прямые $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ и $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние d между ними.
5. Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.
6. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$; $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Ответы:

1. $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$.
2. $2x - 3y + 4z - 1 = 0$.
3. $A = 3$, $D = -23$.
4. $d = 25$.
5. $(2; -3; -5)$.
6. $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + 2$.

Тестовые задания 5

Прямая и плоскость в пространстве

1. Угол между прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ и плоскостью $x + 2y + 3z + 2 = 0$ равен:
а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .
2. Угол между прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ и плоскостью $x + y - z + 3 = 0$ равен:
а) 30° ; б) 45° ; в) 0° ; г) 90° .
3. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 0)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3y + z - 2 = 0$, имеет вид:
а) $x - 3y + z - 5 = 0$; б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$;
в) $3x + 2y + z - 1 = 0$;

$$\text{г) } \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{0}; \quad \text{д) } \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{0}.$$

4. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; -1; 3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-3}$, имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } -x + 2y - 3z + 9 = 0; & \text{б) } \frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}; \\ \text{в) } -x + 2y - 3z - 9 = 0; & \text{г) } -2x - y + 3z + 9 = 0; \\ \text{д) } -2x - y + 3z - 9 = 0. \end{array}$$

5. Найти значение параметра m , при котором прямая $\frac{x+10}{m} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x - 3y + 4z - 1 = 0$:

$$\text{а) } m = 3; \quad \text{б) } m = 4; \quad \text{в) } m = 5; \quad \text{г) } m = 6.$$

6. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{q} = \frac{z-1}{2}$ лежит в плоскости $x + y + z - 3 = 0$, если параметр q равен:

$$\text{а) } 2; \quad \text{б) } -1; \quad \text{в) } -4; \quad \text{г) } 4.$$

7. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{q} = \frac{z-1}{2}$ перпендикулярна плоскости $x + y + z - 3 = 0$, если параметр q равен:

$$\text{а) } 2; \quad \text{б) } -1; \quad \text{в) } -4; \quad \text{г) } 4.$$

8. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{q} = \frac{z-1}{2}$ параллельна плоскости $x + y + z - 5 = 0$, если параметр q равен:

$$\text{а) } 2; \quad \text{б) } -1; \quad \text{в) } -4; \quad \text{г) } 4.$$

9. Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3; 4; 5)$ относительно плоскости $x - 2y + z - 6 = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } M_2(3; 0; -1); & \text{б) } M_2(5; 0; 7); \\ \text{в) } M_2(4; 0; 2); & \text{г) } M_2(3; 0; 6). \end{array}$$

Домашнее задание

Выполните задания 26–31 из прил. 1.

14. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. *Поверхностью второго порядка* называют поверхность, определяемую уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат x и y :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + Ez^2 + 2Fyz + Kx + Ly + Mz + N = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A, B, C, D, E, F \neq 0$.

Например, сфера $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ является поверхностью второго порядка.

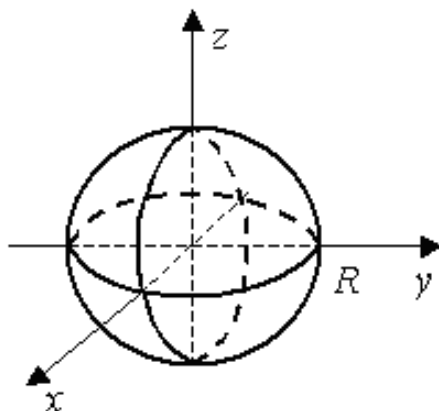
14.1. Сфера

Определение. *Сферой* называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от фиксированной точки, называемой *центром*.

Сфера радиуса R с центром в точке $M_0(a, b, c)$ имеет уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Если $a = b = c = 0$ (центр в точке $O(0; 0; 0)$), то сфера имеет следующий вид:



Пример 1. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 2 = 0$ задает в пространстве сферу.

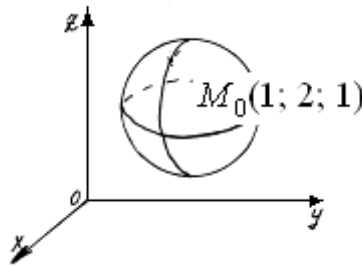
Решение:

Выделив полные квадраты, получим

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

сфера с центром в точке $M_0(1; 2; 1)$ и радиуса 2.

Для ее изображения нарисуем сечения сферы плоскостями, проходящими через центр и параллельными координатным плоскостям. Каждое такое сечение будет окружностью радиуса 2 с центром в точке M_0 .



14.2. Эллипсоид

Определение. *Эллипсоидом* называется поверхность, каноническое уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида*.

Отметим свойства эллипсоида, вытекающие из определения.

1. Эллипсоид – ограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $|x| \leq a$; $|y| \leq b$; $|z| \leq c$. Таким образом, эллипсоид расположен внутри параллелепипеда с центром в точке O и сторонами, равными $2a, 2b, 2c$.

2. Эллипсоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.

3. Точки пересечения с осями:

Из условия $x = y = 0$ следует, что $z = \pm c$.

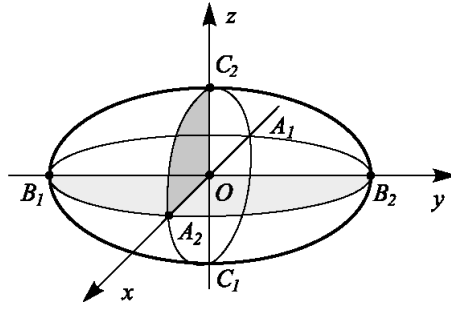
Аналогично $x = \pm a$ и $y = \pm b$.

Тогда точки

$A_1(-a; 0; 0), A_2(a; 0; 0), B_1(0; -b; 0), B_2(0; b; 0), C_1(0; 0; -c)$ и

$C_2(0; 0; c)$ – *вершины эллипсоида*.

Для того чтобы построить эллипсоид, применим *метод параллельных сечений*.



Рассечем эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oxy : $z = h$ (т. к. $|z| \leq c$, то $|h| \leq c$). Тогда линия пересечения будет определяться системой

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

При $|h| < c$ получаем в сечении эллипсы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$.

Это уравнение эллипса с полуосями a_1 и b_1 в плоскости $z = h$. Заметим, что с уменьшением $|h|$ полуоси a_1 и b_1 увеличиваются.

Если $|h| = c$, то сечения представляют собой точки C_1 и C_2 . Если $|h| = 0$, т. е. $h = 0$ и эллипс имеет полуоси a и b с вершинами A_1, A_2, B_1, B_2 .

Аналогично получим, что сечения эллипсоида плоскостями, параллельными плоскостям Oyz и Oxz тоже являются эллипсами.

В любой плоскости, параллельной координатным плоскостям, мы имеем в сечениях эллипсы, отсюда и название данной поверхности.

Примечания:

1. Если $a = b = c$, то уравнение эллипсоида примет вид $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ – сфера.

2. Эллипсоид с центром в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$ имеет уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$

14.3. Однополостный гиперболоид

Определение. *Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Отметим свойства однополостного гиперболоида, вытекающие из определения:

1. Однополостный гиперболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $z \in (-\infty, +\infty)$.

2. Однополостный гиперболоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно всех координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно всех координатных плоскостей.

Для того чтобы построить однополостной гиперболоид, применим *метод параллельных сечений*.

В сечениях гиперболоида плоскостью Oyz ($x = 0$) имеем гиперболу

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

В сечениях гиперболоида плоскостью Oxz ($y = 0$) имеем гиперболу

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . В сечениях имеем линии

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

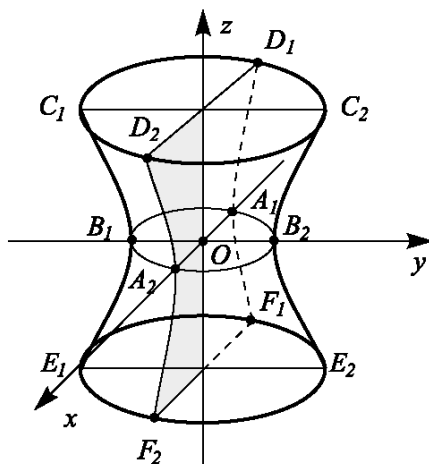
При $h = 0$ получим самый маленький эллипс с полуосями a и b – *горловой эллипс* с вершинами A_1, A_2, B_1, B_2 .

При $h \neq 0$ получим в сечениях эллипсы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются.



Примечания:

1. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ определяют однополостные гиперboloиды, направленные вдоль осей Oy и Ox .

2. Если центр гиперboloида находится в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$, то $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$ – уравнение смещенного гиперboloида.

14.4. Двуполостный гиперboloид

Определение. *Двуполостным гиперboloидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет следующий вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

Отметим свойства однополостного гиперboloида, вытекающие из определения.

1. Двуполостный гиперboloид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $|x| \geq a$ и не ограничен сверху.

2. Двуполостный гиперboloид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно всех координатных осей;
- симметрией относительно всех координатных плоскостей.

Для того чтобы построить двуполостной гиперboloид, применим *метод параллельных сечений*.

В сечениях гиперboloида плоскостью Oyz ($x = 0$) имеем гиперболу

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

В сечениях гиперboloида плоскостью Oxz ($y = 0$) имеем гиперболу с вершинами C_1, C_2 :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . В сечениях имеем линии

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

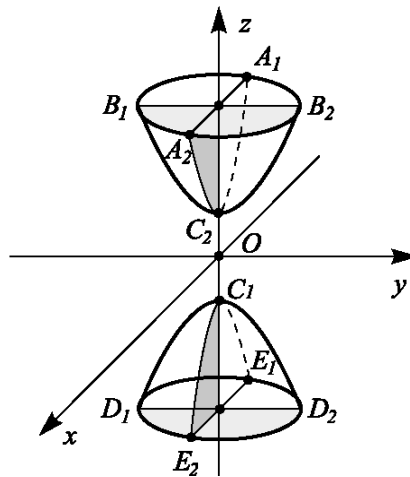
Первое уравнение имеет смысл только при $\frac{h^2}{c^2} - 1 \geq 0$, т. е. $|h| \geq c$.

При $|h| < c$ секущая плоскость не пересекает гиперboloид; при $|h| = c$ получим две точки $C_1(0; 0; -c)$ и $C_2(0; 0; c)$; при $|h| > c$ уравнения линий пересечения будут эллипсы с вершинами A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$, $b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются.



Примечания:

1. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ определяют двуполостные гиперboloиды, направленные вдоль осей Oy и Ox .

2. Если центр гиперboloида находится в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$, то уравнение смещенного гиперboloида $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = -1$.

14.5. Эллиптический параболоид

Определение. *Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнения которой имеет вид*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Отметим свойства эллиптического параболоида, вытекающие из определения:

1. Эллиптический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $z \geq 0$ и принимает сколько угодно большие значения.

2. Эллиптический параболоид обладает:

– осевой симметрией относительно оси Oz ;
– плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz .

3. При $z = 0$ уравнению удовлетворяют $x = y = 0$. Значит, точка $O(0; 0; 0)$ – вершина параболоида.

Для того чтобы построить эллиптический параболоид, применим метод параллельных сечений.

В сечениях параболоида плоскостью Oyz ($x = 0$) имеем параболу

$$\begin{cases} z = \frac{1}{b^2} y^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

В сечениях параболоида плоскостью Oxz ($y = 0$) имеем параболу

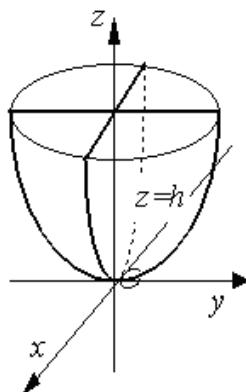
$$\begin{cases} z = \frac{1}{a^2} x^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . В сечениях имеем эллипсы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = a\sqrt{h}$ и $b_1 = b\sqrt{h}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются.



Примечания:

1. Параболоиды $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ и $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ направлены соответственно вдоль осей Ox и Oy .
2. Параболоид $-z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ направлен вдоль отрицательного направления оси Oz .
3. Если $a = b$, то $a^2 z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения.
4. Смещенный параболоид с вершиной в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$:

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}.$$

14.6. Гиперболический параболоид

Определение. *Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнения которой имеет следующий вид:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Отметим свойства гиперболического параболоида, вытекающие из определения:

1. Гиперболический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что z – любое.
2. Гиперболический параболоид обладает:
 - осевой симметрией относительно оси Oz ;
 - плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz .

Для того чтобы построить гиперболический параболоид, применим *метод параллельных сечений*.

3. При $z = 0$ имеем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, т. е. $y = \pm \frac{b}{a}x$ — прямые M_1OM_2

и N_1ON_2 (это асимптоты гипербол); при $y = 0$ получаем $z = \frac{x^2}{a^2}$ — па-

рабола A_1OA_2 ; при $x = 0$ получаем $z = -\frac{y^2}{b^2}$ — парабола B_1OB_2 ; при

$z = h$ ($h > 0$) в сечениях имеем

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h, \end{cases}$$

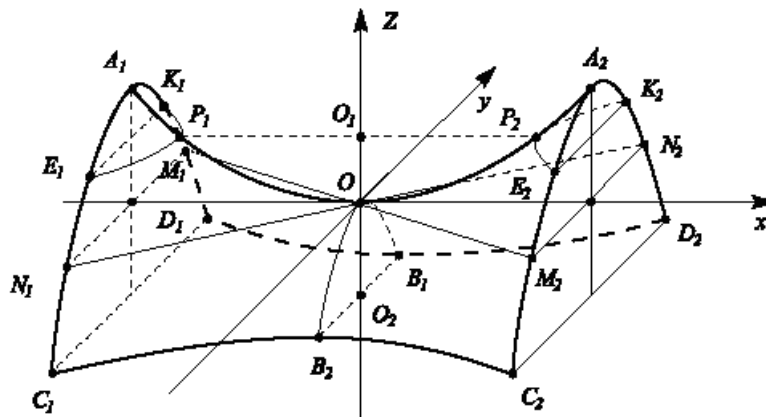
т. е. $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ — гиперболы $K_1P_1E_1$ и $K_2P_2E_2$, где $a_1 = a\sqrt{h}$ и

$b_1 = b\sqrt{h}$; при $z = h$ ($h < 0$) в сечениях имеем

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h, \end{cases}$$

т. е. $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = -1$ — сопряженные гиперболы $D_1B_1D_2$ и $C_1B_2C_2$, где

$a_1 = a\sqrt{(-h)}$ и $b_1 = b\sqrt{(-h)}$.



Примечания:

1. Параболоиды $x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ и $y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ направлены соответственно вдоль оси Ox и оси Oy .

2. Уравнение смещенного гиперболического параболоида с вершиной в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид $z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$.

14.7. Конус второго порядка

Определение. *Конической поверхностью (конусом) второго порядка* называют поверхность, определяемую в декартовой прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Отметим свойства конуса, вытекающие из определения:

1. Точка O – центр симметрии – *вершина конуса*.
2. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей.

Для того чтобы построить конус второго порядка, применим *метод параллельных сечений*.

В сечениях конуса плоскостью Oyz ($x = 0$) имеем прямые линии

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \\ x = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y = \pm \frac{b}{c} z, \\ x = 0, \end{cases}$$

называемые *образующими* конуса.

В сечениях конуса плоскостью Oxz ($y = 0$) имеем прямые линии

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \pm \frac{a}{c} z, \\ y = 0, \end{cases}$$

называемые *образующими* конуса.

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . В сечениях имеем линии

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

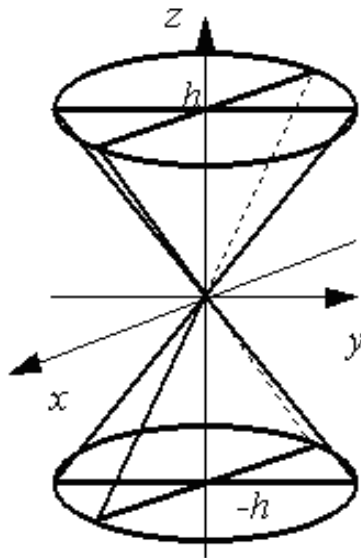
являющиеся эллипсами

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = \frac{a}{c}|h|$ и $b_1 = \frac{b}{c}|h|$.

При $h = 0$ получим в сечении точку $O(0; 0; 0)$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются.



Примечания:

1. Коническую поверхность второго порядка можно также определить, как семейство прямых, проходящих через точку O и пересекающих эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Если $a = b$, то $\frac{a^2}{c^2} z = x^2 + y^2$ – *круговой конус*.

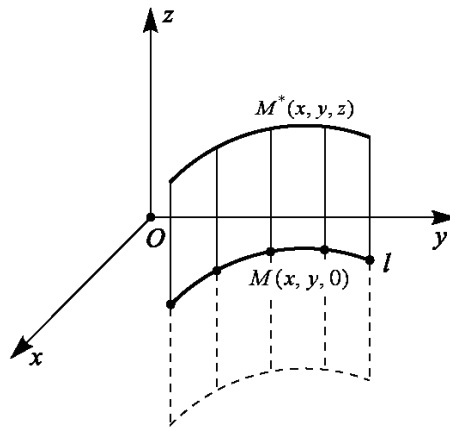
3. Конусы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ направлены вдоль осей Oy и Ox .

4. Смещенный конус с вершиной в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$ задается уравнением $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$.

14.8. Цилиндрические поверхности

Определение. *Цилиндрической поверхностью* называется такая поверхность, каноническое уравнение которой не содержит одной из координат, например, $z : F(x, y) = 0$.

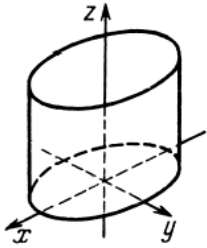
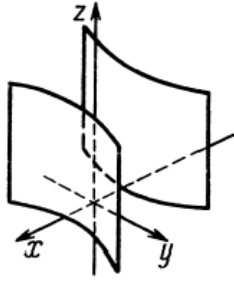
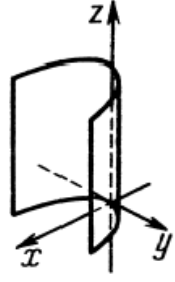
На плоскости Oxy это уравнение определяет некоторую линию L .



Пусть $M(x, y, 0) \in L$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Но этому уравнению будут удовлетворять координаты любой точки $M^*(x, y, z)$.

Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$ описывает поверхность, проектирующуюся на плоскость Oxy в кривую L .

В зависимости от типа направляющей L цилиндрическая поверхность носит следующие названия (см. табл. ниже).

Название цилиндра	Уравнение	Изображение
Эллиптический	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический	$y^2 = 2px$	

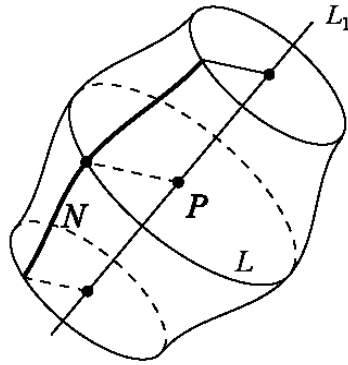
Примечания:

1. Цилиндрическую поверхность можно образовать движением прямой линии, параллельной оси Oz , по кривой L . Кривая L называется *направляющей*, прямые, параллельные оси Oz , называются *образующими*. Образованная таким образом поверхность называется *цилиндрической поверхностью*.

2. Если уравнение поверхности не содержит x (или y), то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox (или оси Oy).

14.9. Поверхности вращения

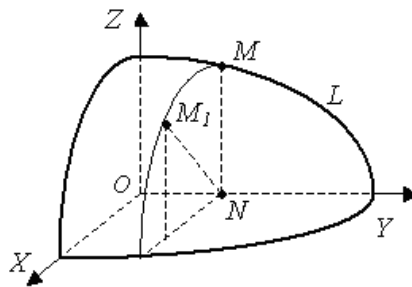
Пусть в некоторой плоскости выбрана кривая L и прямая L_1 . Опустим из точки N кривой L перпендикуляр на прямую L_1 и построим окружность с центром в точке P и радиусом NP , плоскость которой перпендикулярна прямой L_1 .



Определение. **Поверхностью вращения** называют поверхность, образованную вращением плоской кривой L вокруг оси L_1 , находящейся в этой же плоскости.

Пусть $L \in Oxz$ и Oy – ось вращения, т. е.

$$L: \begin{cases} x = 0, \\ F(y; z) = 0. \end{cases}$$



Выведем уравнение соответствующей поверхности вращения. Вращаем кривую L вокруг оси Oy . Получим некоторую поверхность. Пусть $M_1(x, y, z)$ – произвольная точка получившейся поверхности.

Тогда

$$M_1N = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

С другой стороны, если $M(0; y_0; z_0)$, и с учетом, что $M_1N = MN$ – как радиусы, а $MN = \pm z_0$ получаем $\sqrt{x^2 + z^2} = \pm z_0$. Поэтому выполняется одно из соотношений: $F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$, если $z_0 = +\sqrt{x^2 + z^2}$, или $F(y, -\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$, если $z_0 = -\sqrt{x^2 + z^2}$.

Таким образом, мы показали, что если точка $M_1(x; y; z)$ принадлежит поверхности вращения, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$F(y; \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M_1(x; y; z)$ поверхности вращения. Последнее уравнение является уравнением поверхности вращения линии L вокруг оси Oy .

Таким образом, мы приходим к следующему правилу: чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L , лежащей в плоскости yOz , вокруг оси Oy , нужно в уравнении этой линии заменить z на $z = \pm \sqrt{x^2 + z^2}$.

При выборе знака перед радикалом следует придерживаться следующего правила: знак должен совпадать в соответствующих точках со знаком координаты z на исходной кривой.

Совершенно аналогичные правила будут для получения уравнений поверхностей вращения, получающихся вращением плоских линий вокруг других координатных осей.

К поверхностям вращения, например, относятся:

1. Эллипсоид вращения $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Конус вращения $k^2 z^2 = x^2 + y^2$.

Пример 1. Определить поверхность, получаемую вращением параболы $z^2 = 2px$ вокруг осей Ox и Oz .

Решение:

1. Согласно правилу составления уравнения поверхности вращения вокруг оси Ox , заменим в уравнении параболы z на $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$. Имеем $(\pm \sqrt{y^2 + z^2})^2 = 2px$ или $y^2 + z^2 = 2px$, т. е. параболоид вращения.

2. Согласно правилу составления уравнения поверхности вращения вокруг оси Oz , заменим в уравнении параболы x на $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$. Имеем $z^2 = \pm 2p\sqrt{x^2 + y^2}$ или $z^4 = 4p^2(x^2 + y^2)$.

Таким образом, поверхность вращения не обязательно является поверхностью второго порядка.

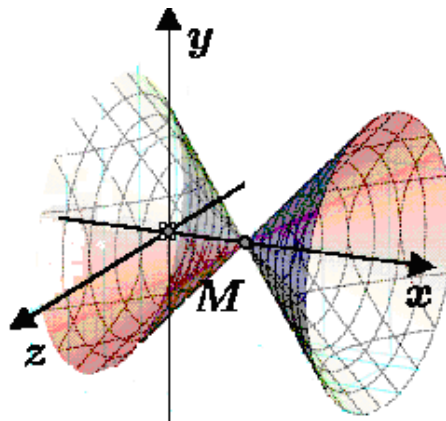
Пример 2. Найти уравнение поверхности, если прямую $y = x - 1$ вращать вокруг оси Ox .

Решение:

Так как вращение прямой линии происходит вокруг оси Ox , то в силу изложенного выше правила, нам нужно в данном уравнении $y = x - 1$ заменить y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$.

В результате получим $\pm\sqrt{y^2 + z^2} = x - 1$. Возведя обе части этого соотношения в квадрат, получим уравнение конуса с вершиной в точке $M_0(1; 0; 0)$:

$$y^2 + z^2 = (x - 1)^2.$$



Пример 3. Пусть γ – окружность в плоскости Oyz радиуса b с центром в точке $A(0, a, 0) \in Oy$, $a > b$. Найти уравнение поверхности, если вращать ее вокруг Oz .

Решение:

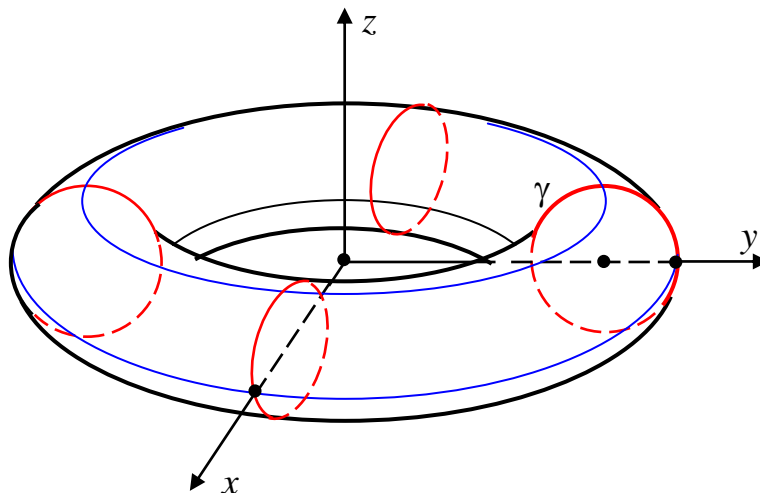
Уравнение окружности в плоскости Oyz имеет вид

$$(y - a)^2 + z^2 = b^2.$$

Вращаем вокруг Oz . Поэтому z оставляем без изменений, а y заменяем на $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2.$$

Получили уравнение тора. Заметим, что тор не относится к поверхностям 2 порядка.



Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение поверхности второго порядка.
2. Дайте определение эллипсоида. Исследуйте форму эллипсоида с помощью метода параллельных сечений.
3. Запишите канонические уравнения однополостного и двуполостного гиперболоидов, а также эллиптического и гиперболического параболоидов. Исследуйте форму данных поверхностей с помощью метода параллельных сечений.
4. Что называется конической поверхностью?
5. Запишите каноническое уравнение конуса второго порядка.
6. Что называется цилиндрической поверхностью?
7. Запишите уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.
8. Сформулируйте правило получения поверхности вращения линии вокруг оси Ox .
9. Что называется поверхностью вращения?

Практическая часть 9

Поверхности второго порядка

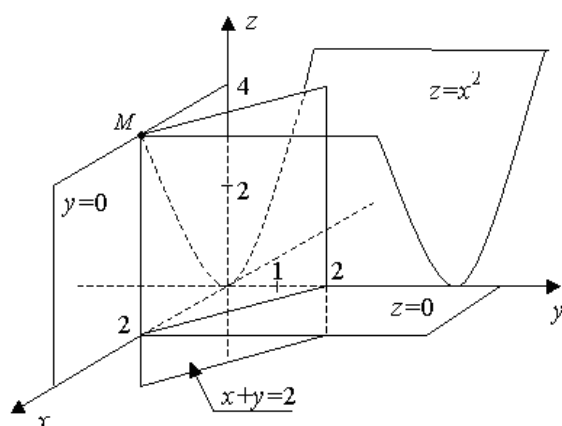
Пример 1. В системе координат $Oxyz$ построить тело, ограниченное следующими поверхностями: $y = 0$, $x + y = 2$, $z = x^2$, $z = 0$.

Решение:

Имеем:

- 1) $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz ;
- 2) $x + y = 2$ – уравнение плоскости, которая проходит параллельно оси Oz и пересекает координатную плоскость Oxy по прямой $x + y = 2$;
- 3) $z = x^2$ – уравнение параболического цилиндра, который проходит параллельно оси Oy и пересекает координатную плоскость Oxz по параболу $z = x^2$;

4) $z = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxy .



Построим чертеж в системе координат $Oxyz$. Чтобы построить плоскость $x + y = 2$, сначала на плоскости Oxy по двум точкам $(0; 2)$ и $(2; 0)$ строим прямую $x + y = 2$, а затем эту прямую параллельно оси Oz «поднимаем» вверх и «опускаем» вниз. Получается плоскость $x + y = 2$.

Чтобы построить цилиндр $z = x^2$, сначала на плоскости Oxz по точкам строим параболу $z = x^2$:

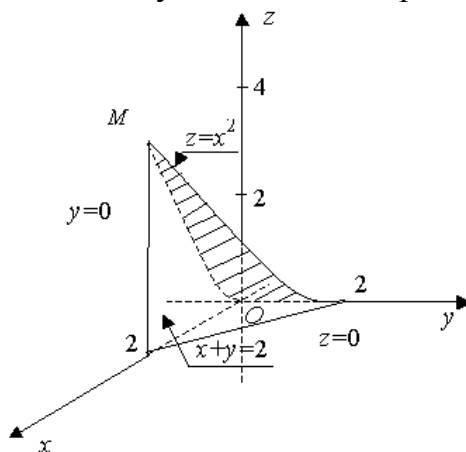
x	0	1	-1	2	-2
z	0	1	1	4	4

Затем эту параболу параллельно оси Oy «двигаем» влево и вправо. Получается параболический цилиндр $z = x^2$. При этом он пересекает координатную плоскость Oxy по оси Oy :

$$\left. \begin{array}{l} z = x^2 \\ z = 0, \end{array} \right\}$$

откуда $x = 0$, а это и есть уравнение оси Oy .

Нарисуем отдельно получившееся в пересечении тело V .



Пример 2. В системе координат $Oxyz$ построить тело, ограниченное поверхностями $z = y^2 - x^2$, $z = 0$, $y = 2$.

Решение:

$z = y^2 - x^2$ – гиперболический параболоид. Найдем линии его пересечения с плоскостью $z = 0$:

$$\begin{cases} z = 0, \\ z = y^2 - x^2, \end{cases}$$

откуда $y^2 = x^2$, или $y = \pm x$ – биссектрисы первого и второго координатных углов в плоскости xOy .

Найдем линии его пересечения с плоскостью $y = 2$:

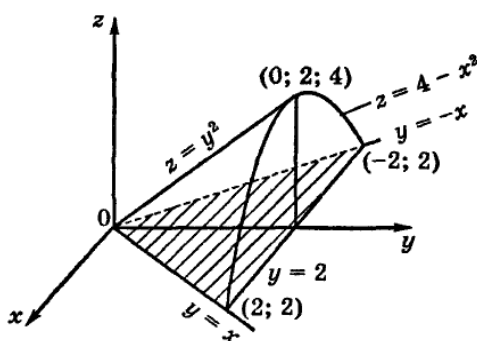
$$\begin{cases} y = 2, \\ z = y^2 - x^2, \end{cases}$$

откуда $z = 4 - x^2$ – парабола в плоскости $y = 2$ с вершиной в точке $(0; 2; 4)$ и ветвями, направленными вниз (относительно оси Oz).

Найдем линию пересечения гиперболического параболоида $z = y^2 - x^2$ с плоскостью yOz ($x = 0$):

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = y^2 - x^2, \end{cases}$$

откуда $z = y^2$ – парабола в плоскости yOz с осью симметрии Oz , ветви которой направлены вверх.



Пример 3. В системе координат $Oxyz$ построить тело, ограниченное поверхностями $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$.

Решение:

$z = 4 - x^2 - y^2$, или $z - 4 = -(x^2 + y^2)$ – параболоид вращения с вершиной $(0; 0; 4)$, направленный вниз.

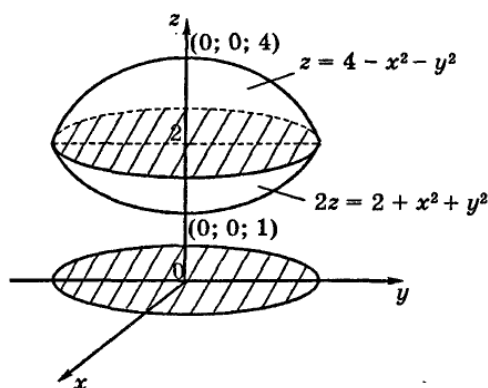
$2z = 2 + x^2 + y^2$, или $z - 1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ – параболоид вращения с вершиной $(0; 0; 1)$.

Найдем линию пересечения этих поверхностей:

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ 2z = 2 + x^2 + y^2, \end{cases}$$

откуда, после исключения z имеем $8 - 2x^2 - 2y^2 = 2 + x^2 + y^2$, или $x^2 + y^2 = 2$. Тогда из первого уравнения системы $z = 2$.

Таким образом, линия пересечения данных поверхностей лежит в плоскости $z = 2$ и представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 2$.



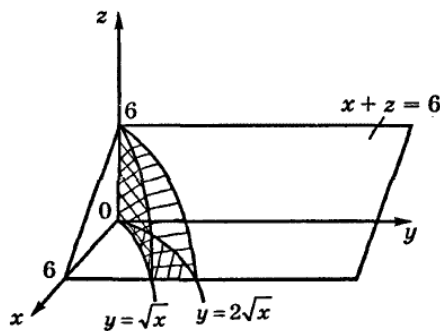
Пример 4. В системе координат $Oxyz$ построить тело, ограниченное поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

Решение:

$y = \sqrt{x}$ – цилиндрическая поверхность, проходящая через ось Oz , имеющая в проекции на плоскость xOy график параболы $y = \sqrt{x}$.

$y = 2\sqrt{x}$ – цилиндрическая поверхность, проходящая через ось Oz , имеющая в проекции на плоскость xOy график параболы $y = 2\sqrt{x}$.

$x + z = 6$ или $\frac{x}{6} + \frac{z}{6} = 1$ – плоскость, параллельная оси Oy , отсекающая на осях Ox и Oz отрезки, равные 6.
 $z = 0$ – плоскость xOy .

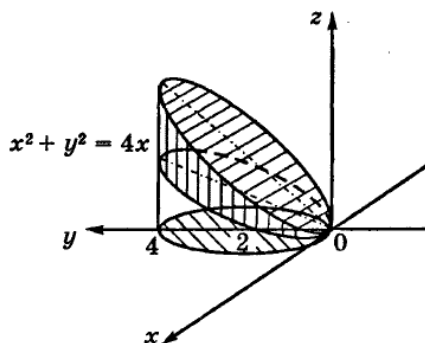


Пример 5. В системе координат $Oxyz$ построить тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 = 4x$, $z = x$, $z = 2x$.

Решение:

$x^2 + y^2 = 4x$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz . Преобразуем данное уравнение, выделяя полные квадраты: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$ или $(x-2)^2 + y^2 = 4$ – окружности в плоскости xOy с центром $(2; 0)$ и радиуса, равного 2. В пространстве это прямой круговой цилиндр с основанием $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

$z = x$ и $z = 2x$ – плоскости, проходящие через ось Oy перпендикулярно xOz .



Пример 6. В системе координат $Oxyz$ построить тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, $4z = x^2 + y^2$.

Решение:

$x^2 + y^2 + z^2 = 12$ – сфера с центром в начале координат и радиуса $R = 2\sqrt{3}$; $4z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения вокруг оси Oz .

Найдем линию пересечения данных поверхностей:

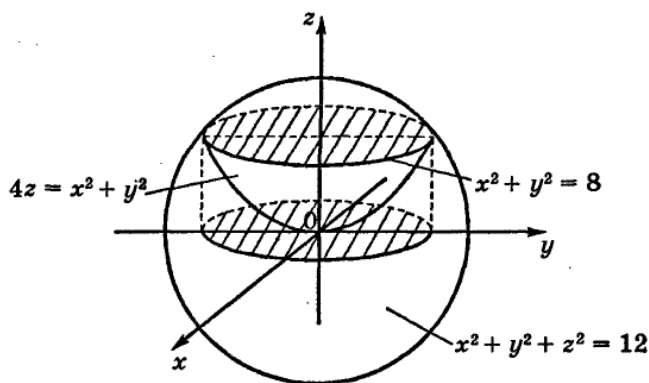
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 4z, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 4z + z^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 4z. \end{cases}$$

Решениями первого уравнения являются плоскости $z_1 = -6$ и $z_2 = 2$. Так как из условия $4z = x^2 + y^2$ следует, что $z \geq 0$, то нас удовлетворяет лишь плоскость $z_2 = 2$, параллельная плоскости xOy . Подставляя $z_2 = 2$ во второе уравнение системы, получим $x^2 + y^2 = 8$.

Таким образом, линией пересечения данных поверхностей является окружность $x^2 + y^2 = 8$, лежащая в плоскости $z = 2$.



Пример 7. В системе координат $Oxyz$ построить тело, ограниченное поверхностями $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$.

Решение:

$y = x^2$ – уравнение параболического цилиндра;

$z = 0$ – уравнение плоскости xOy ;

$y = 1$ – уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oy в точке $(0; 1; 0)$:

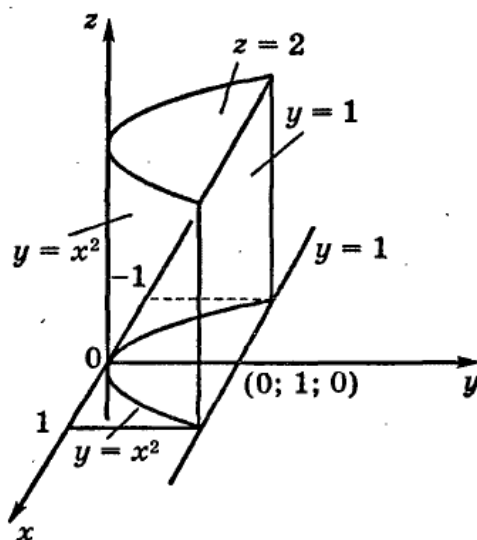
$$\begin{cases} z = 0, \\ y = x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2, \\ y = x^2, \end{cases}$$

Найдем в плоскости xOy пересечение параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$:

$$\begin{cases} y = 1, \\ y = x^2, \end{cases}$$

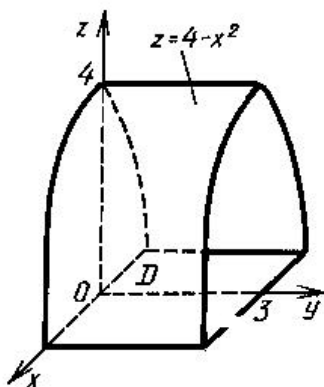
Строя параболический цилиндр $y = x^2$ и его сечения плоскостями $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$, получаем искомое тело.



Пример 8. Нарисуйте область, ограниченную цилиндрической поверхностью $z = 4 - x^2$ и плоскостями $y = 0$, $y = 3$ и $z = 0$.

Решение:

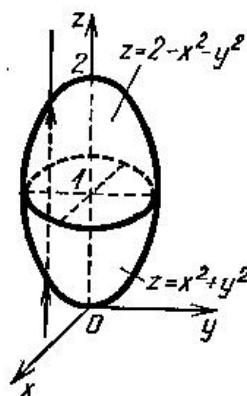
Построения очевидны из рисунка.



Пример 9. Нарисуйте область, ограниченную поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 2 - x^2 - y^2$.

Решение:

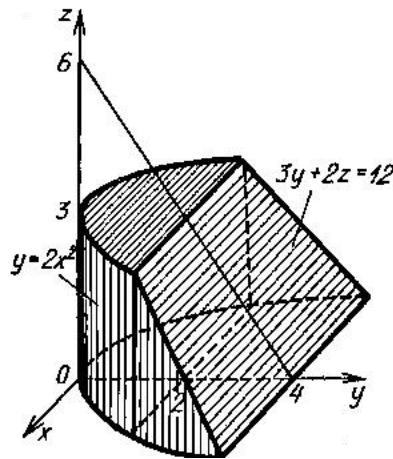
Область ограничена снизу параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ с вершиной в начале координат, а сверху – параболоидом вращения $z = 2 - x^2 - y^2$ с вершиной в точке $(0; 0; 2)$.



Пример 10. Нарисуйте область, ограниченную цилиндрической поверхностью $y = 2x^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = 3$ и $3y + 2z = 12$.

Решение:

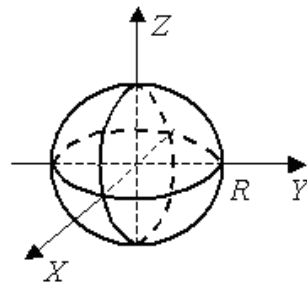
Построение очевидно из следующего рисунка.



Пример 11. Найти уравнение поверхности вращения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox .

Решение:

Согласно вышеприведенному правилу, следует в уравнении окружности заменить y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Получим уравнение поверхности вращения $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, т. е. уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом, равным R .

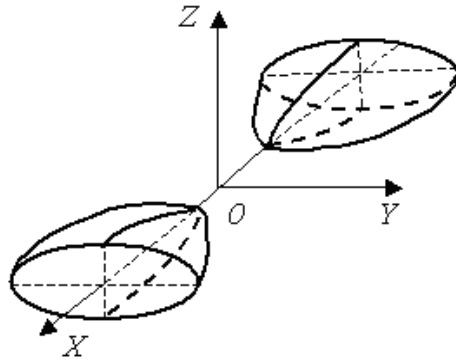


Пример 12. Найти уравнение поверхности вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг действительной оси.

Решение:

Вращение происходит вокруг оси Ox , следовательно, согласно вышеприведенному правилу, следует в уравнении гиперболы заменить y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Получим уравнение поверхности вращения

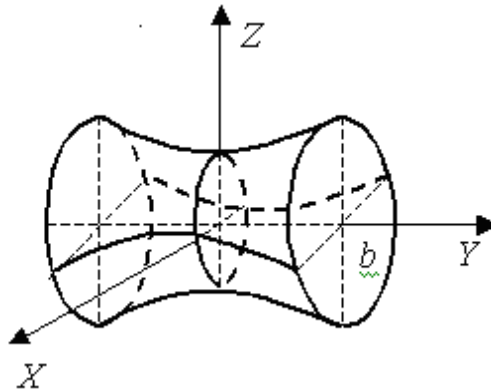
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ — двуполостный гиперболоид вращения.}$$



Пример 13. Найти уравнение поверхности вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг мнимой оси.

Решение:

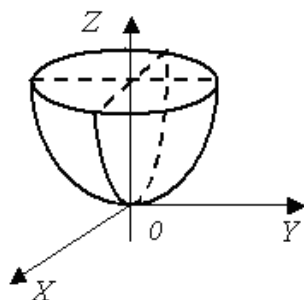
Вращение происходит вокруг оси Oy , следовательно, следует в уравнении гиперболы заменить x на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Получим уравнение поверхности вращения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ – однополостный гиперболоид вращения.



Пример 14. Найти уравнение поверхности вращения параболы $z = y^2$ вокруг оси Oz .

Решение:

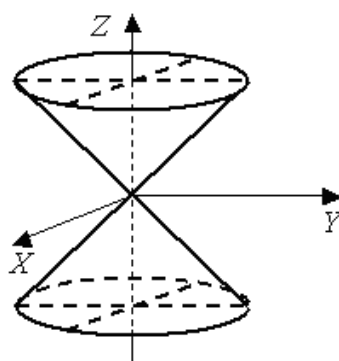
Вращение происходит вокруг оси Oz , следовательно, следует в уравнении параболы заменить y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Получим уравнение поверхности вращения $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения.



Пример 15. Найти уравнение поверхности, полученной вращением прямой $z = y$ вокруг оси Oz .

Решение:

Вращение происходит вокруг оси Oz , следовательно, следует в уравнении гиперболы заменить y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Получим уравнение поверхности вращения $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ или $z^2 = x^2 + y^2$ – прямой круговой конус.



Домашнее задание

Выполните задания 32–36 из прил. 1.

15. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Пусть поверхность второго порядка задается уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + c = 0,$$

где среди коэффициентов a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ есть хотя бы один ненулевой.

Выражение в первой строке называется квадратичной частью уравнения, c – свободным членом, остальное – линейная часть.

Квадратичная часть этого уравнения представляет собой квадратичную форму. Ее коэффициенты образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В курсе линейной алгебры доказывается, что матрицу любой квадратичной формы с помощью поворота координатных осей декартовой системы координат можно привести к диагональному виду

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда в новой декартовой системе координат $Ox'y'z'$ с тем же началом квадратичная часть уравнения поверхности второго порядка примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

который тоже называется диагональным. При этом числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ не зависят от выбора новой декартовой системы координат $Ox'y'z'$.

В новой системе координат уравнение поверхности имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + 2b_3 z' + c = 0.$$

Далее, если все $\lambda_i \neq 0$ мы выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(x'^2 + \frac{2b_1}{\lambda_1} x' + \frac{2b_1^2}{\lambda_1^2} \right) - \frac{2b_1^2}{\lambda_1} + \lambda_2 \left(y'^2 + \frac{2b_2}{\lambda_2} y' + \frac{2b_2^2}{\lambda_2^2} \right) - \frac{2b_2^2}{\lambda_2} + \\ + \lambda_3 \left(z'^2 + \frac{2b_3}{\lambda_3} z' + \frac{2b_3^2}{\lambda_3^2} \right) - \frac{2b_3^2}{\lambda_3} + c = 0, \\ \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z' + \frac{b_3}{\lambda_3} \right)^2 + c' = 0. \end{aligned}$$

Затем делаем замену координат:

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}, \quad z'' = z' + \frac{b_3}{\lambda_3},$$

которая означает перенос начала координат в точку $O'(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2}, -\frac{b_3}{\lambda_3})$.

Получим уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 = -c'.$$

Затем разделим уравнение на $c' \neq 0$ и сведем его к одному из канонических уравнений.

Вид поверхности можно определить из следующей таблицы:

Но мер п/п	Поверхность	Ее каноническое уравнение	Инварианты
1	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$	$\delta > 0, \Delta < 0$
2	Мнимый эллипсоид (\emptyset)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$	$\delta > 0, \Delta > 0$
3	Мнимый конус (точка)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$	$\delta > 0, \Delta = 0$
4	Двуполостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$	$\delta < 0, \Delta < 0$
5	Однополостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$	$\delta < 0, \Delta > 0$
6	Конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$	$\delta < 0, \Delta = 0$
7	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$	$\delta = 0, \Delta < 0$
8	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$	$\delta = 0, \Delta > 0$
9	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$\delta = \Delta = 0, I_2 > 0,$ $I_1 I_4 < 0$
10	Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$	$\delta = \Delta = 0, I_2 > 0,$ $I_1 I_4 > 0$
11	Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$	$\delta = \Delta = 0, I_2 > 0,$ $I_4 = 0$
12	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$\delta = \Delta = 0, I_2 < 0,$ $I_4 \neq 0$
13	Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$	$\delta = \Delta = 0, I_2 < 0,$ $I_4 = 0$
14	Параболический цилиндр	$x^2 = 2py$	$\delta = \Delta = 0, I_2 = 0,$ $I_4 \neq 0$

Но мер п/п	Поверхность	Ее каноническое уравнение	Инварианты
15	Пара параллельных плоскостей	$x^2 = a^2$	$\delta = \Delta = 0,$ $I_2 = I_4 = 0, I_3 > 0$
16	Пара совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	$\delta = \Delta = 0,$ $I_2 = I_4 = 0, I_3 = 0$
17	Пара мнимых параллельных плоскостей	$x^2 = -a^2$	$\delta = \Delta = 0,$ $I_2 = I_4 = 0, I_3 < 0$

Здесь мы использовали следующие инварианты:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{vmatrix};$$

$$I_1 = Sp(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{сумма диагональных ми-}$$

норов второго порядка в δ ;

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & c \end{vmatrix} - \text{сумма диагональных мино-}$$

ров второго порядка из Δ , не входящих в δ ;

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & c \end{vmatrix} - \text{сумма диа-}$$

гональных миноров третьего порядка в Δ , кроме δ .

Следует заметить, что величины δ , Δ , I_1 , I_2 не изменяются при любых преобразованиях декартовой системы координат, а I_3 , I_4 не изменяются лишь при повороте координатных осей, но меняются при переносе начала координат.

Пример 1. Привести уравнение кривой второго порядка

$$4x^2 + z^2 - 24x + 8y + 2z + 5 = 0$$

к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить ее в исходной системе координат.

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -12 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -64 < 0.$$

Из таблицы выше определяем, что указанные значения соответствуют п. 7 – эллиптическому параболоиду.

Выделим в уравнении полные квадраты:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 36 + (z^2 + 2z + 1) - 1 + 8y + 5 = 0,$$

$$4(x-3)^2 + (z+1)^2 + 8y - 32 = 0,$$

$$4(x-3)^2 + (z+1)^2 = -8(y-4).$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y - 4, \\ z' = z + 1. \end{cases}$$

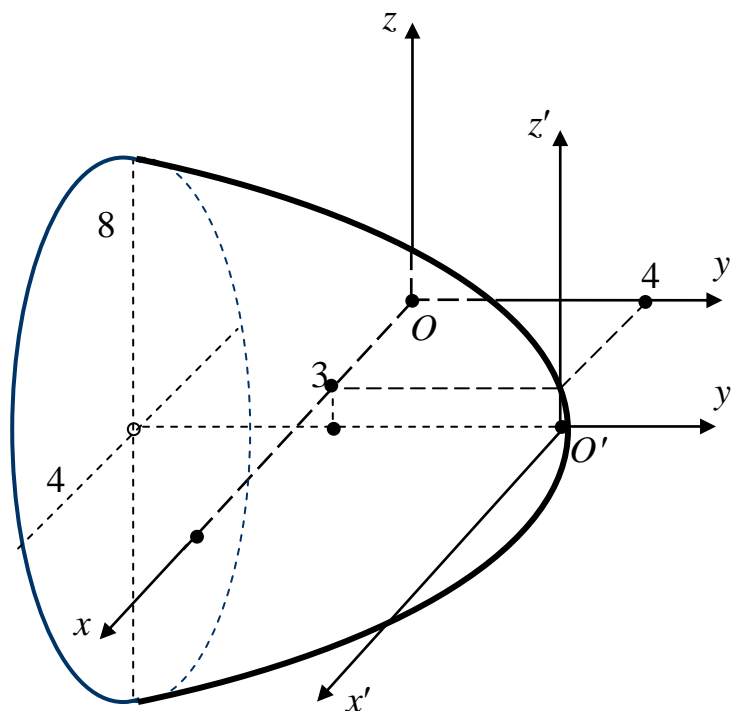
Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3, 4, -1)$. После замены получаем уравнение

$$4x'^2 + z'^2 = -8y', \text{ или } (x')^2 + \frac{(z')^2}{4} = -8y'.$$

Это уравнение задает эллиптический параболоид, ось которого будет $O'y'$. В сечении плоскостью $y' = -8$ получится эллипс

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(z')^2}{64} = 1 \text{ с полуосями 4 и 8.}$$

Это следует учесть при изображении.



Пример 2. Нарисуйте поверхность

$$4x^2 - y^2 + z^2 + 8x - 4y - 2z = 3.$$

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

Из таблицы определяем, что указанные значения соответствуют п. 5 – однополосному гиперболоиду.

Выделим полные квадраты по переменным x, y, z :

$$4(x^2 + 2x + 1) - 4 - (y^2 + 4y + 4) + 4 + (z^2 - 2z + 1) - 1 = 3.$$

Отсюда

$$4(x+1)^2 - (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4, \text{ или } \frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y + 2, \\ z' = z - 1. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(-1; -2; 1)$. После замены получаем уравнение

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{4} = 1.$$

Данное уравнение отличается от канонического уравнения однополостного гиперболоида тем, что поменялись ролями оси ординат (O_1y) и аппликат (O_1z). Не меняя обозначения осей, произведем построение поверхности с помощью сечений. В сечении плоскостью $\overline{xO_1z}$ получаем эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Его полуоси равны 1 и 2 и лежат соответственно на осях O_1x и O_1y . В сечении плоскостью $\overline{xO_1y}$ получаем гиперболу с уравнением

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

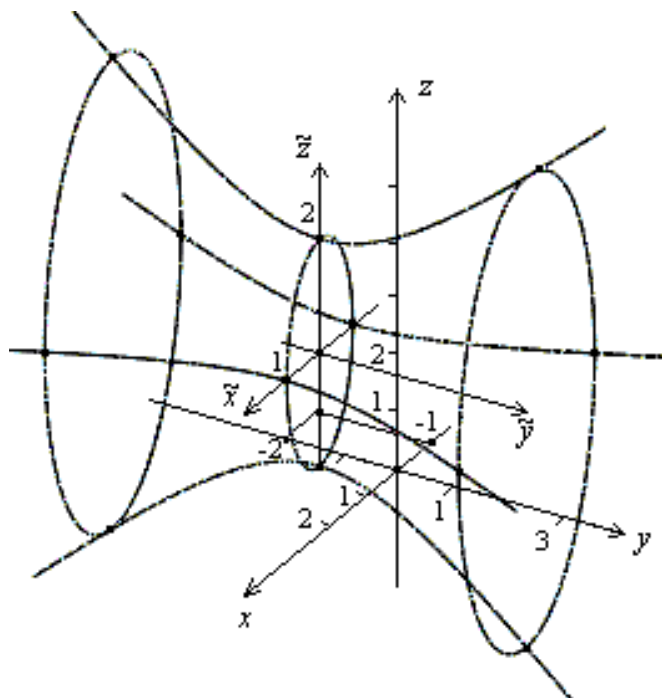
Ее мнимая ось лежит на оси O_1y , а действительная ось лежит на оси O_1x , полуоси соответственно равны 2 и 1. В сечении плоскостью $\overline{yO_1z}$ получаем равностороннюю гиперболу с уравнением

$$-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Ее мнимая ось лежит на оси O_1y , а действительная ось лежит на оси O_1z , обе полуоси равны 2.

Для большей наглядности нарисуем еще два сечения плоскостями, параллельными плоскости $\overline{xO_1z}$. В сечениях получим эллипсы, подобные эллипсу в плоскости $\overline{xO_1z}$.

По рассмотренным сечениям можно представить себе форму гиперboloида и его расположение в пространстве.



Пример 3. Построить поверхность $9x^2 - 4y^2 + 36x - 8y - 4 = 0$ и определить ее вид.

Решение:

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0;$$

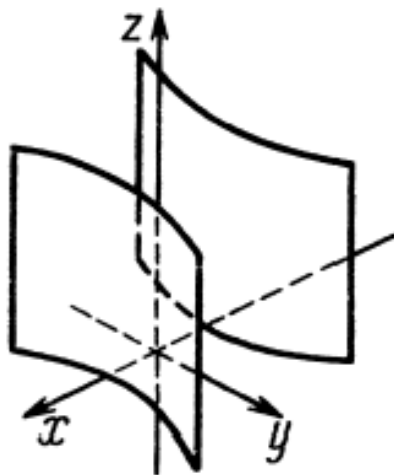
$$I_4 = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 18 \\ 0 & -4 & -4 \\ 18 & -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1152 \neq 0.$$

Из таблицы определяем, что указанные значения соответствуют п.12 – гиперболическому цилиндру.

Выделяя полные квадраты, имеем

$$9(x^2 + 4x + 4) - 36 - 4(y^2 + 2y + 1) + 4 - 4 = 0,$$

т. е. $9 \cdot (x+2)^2 - 4 \cdot (y+1)^2 = 36$, откуда каноническое уравнение $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ – гиперболический цилиндр с образующей, параллельной оси O_z .



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2007.
2. **Беклемишева, Л. А.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. – М. : Физматлит, 2003.
3. **Гусак, А. А.** Задачи и упражнения по высшей математике. Т. 1 / А. А. Гусак. – Минск : Вышейш. шк., 1988.
4. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1999.
5. **Ефимов, Н. В.** Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2006.
6. **Ильин, В. А.** Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Физматлит, 2007.
7. **Кузнецов, Л. А.** Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1994.
8. **Руководство к решению** задач по высшей математике. Ч. 1 / под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Вышейш. шк., 1989.
9. **Подоксенов, М. Н.** Аналитическая геометрия. Курс лекций с примерами решения задач / М. Н. Подоксенов. – Витебск, Изд-во ВГУ, 2006.
10. **Сборник задач** по математике для втузов : в 4 ч. Ч. 1 / под общей ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2004.
11. **Сборник индивидуальных** заданий по высшей математике. Ч. 1 / под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышейш. шк., 1990.

Индивидуальные задания

Задание 1. Даны координаты точек M_1 и M_2 и уравнение прямой d .

Требуется:

- 1) построить прямую d и точки M_1 и M_2 .
- 2) вычислить расстояние от точки M_1 до прямой d ;
- 3) написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1 , параллельно прямой d ;
- 4) написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1 , перпендикулярно прямой d ;
- 5) написать уравнение прямой M_1M_2 ;
- 6) выяснить взаимное расположение прямых M_1M_2 и d ; если они не параллельны, определить тангенс угла между ними и найти координаты точки их пересечения.

Вариант	Уравнение прямой d	Координаты точек		Вариант	Уравнение прямой d	Координаты точек	
		M_1	M_2			M_1	M_2
1	$x + y + 1 = 0$	(2; 3)	(3; 1)	16	$y + 2 = 0$	(-1; -1)	(0; 3)
2	$x - y + 1 = 0$	(1; 0)	(2; -1)	17	$-2x + y = 0$	(-1; 2)	(3; 2)
3	$2x + 2y - 1 = 0$	(2; 3)	(2; 2)	18	$x + y + 1 = 0$	(-2; 3)	(1; 1)
4	$2x - 2y + 1 = 0$	(2; -3)	(-3; 1)	19	$x - y + 4 = 0$	(0; 3)	(4; -1)
5	$x - y - 1 = 0$	(0; 3)	(-2; 1)	20	$x - 3 = 0$	(2; 3)	(-3; 1)
6	$x + 2y - 6 = 0$	(2; -2)	(-1; 1)	21	$-x + y + 1 = 0$	(1; 1)	(-3; -1)
7	$x - 3y + 3 = 0$	(2; 0)	(0; 1)	22	$4x + 1 = 0$	(2; -2)	(1; 1)
8	$y + 1 = 0$	(-2; 3)	(-4; 1)	23	$-x + 5y + 1 = 0$	(-2; 3)	(0; 1)
9	$x + 4y + 6 = 0$	(0; 3)	(-3; 1)	24	$3x - 2y - 6 = 0$	(-2; 4)	(3; 1)
10	$3x - 2y + 6 = 0$	(2; 3)	(-3; -2)	25	$2x + 6y - 12 = 0$	(2; 3)	(3; 1)
11	$3x - 5y + 15 = 0$	(2; -2)	(3; 1)	26	$-2x + 3y - 12 = 0$	(1; -3)	(-3; 1)
12	$3x + y - 4 = 0$	(2; 0)	(0; 1)	27	$x + 5y + 1 = 0$	(-2; 3)	(-3; 1)
13	$x - 4y + 6 = 0$	(0; 4)	(3; -1)	28	$-3x + 7y + 21 = 0$	(2; -1)	(3; 1)
14	$x - 5y + 10 = 0$	(2; 3)	(4; 1)	29	$3x + y = 0$	(2; 1)	(3; 5)
15	$x + 4y = 0$	(-1; 3)	(1; -4)	30	$3x - 7y + 21 = 0$	(2; 3)	(-3; 6)

Задание 2. Решить задачу.

Вариант	Условие задачи
1	Какую ординату имеет точка C , лежащая на одной прямой с точками $A(-6; -6)$ и $B(-3; -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3.
2	Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.
3	Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 90° , в) 0° .
4	Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей.
5	Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 1)$ параллельно прямой MN , если $M(-3; -2)$, $N(1; 6)$.

6	Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4; -3)$ и $B(-1; 2)$ в отношении $\lambda = 2/3$.
7	Дан треугольник с вершинами $A(3; 1)$, $B(-3; -1)$ и $C(5; -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C .
8	Через точку $P(5; 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox ; в) параллельную оси Oy .
9	При каком значении λ прямая $3x + \lambda y - 15 = 0$ отсекает на координатных осях отрезки одинаковой длины.
10	Найти точку пересечения медиан треугольника E , вершинами которого являются точки $A(-3; 1)$, $B(7; 5)$ и $C(5; -3)$.
11	Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$.
12	Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; -1)$. Найти уравнения двух других сторон.
13	Вычислить высоту трапеции, основания которой лежат на прямых $3x + 4y - 10 = 0$ и $6x + 8y - 45 = 0$.
14	Через точку пересечения прямых $5x + 2y - 12 = 0$ и $6x - 7y - 5 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $7x - 8y + 2 = 0$.
15	Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.
16	Стороны трапеции лежат на прямых, заданных уравнениями $4x - y + 6 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$. Найти точку пересечения ее диагоналей.
17	Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1; -3)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$, $D(3; -5)$.
18	Даны середины сторон треугольника: $P(2; 3)$, $Q(4; -1)$ и $R(-3; 5)$. Составить уравнения его сторон.
19	Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-2; -3)$, $B(1; 2)$, $C(5; 3)$. Составьте уравнение его сторон и найдите координаты точки D .
20	Прямая проходит через точки $(-2; 3)$ и $(4; -1)$. Найти длину отрезков, отсекаемых ею на осях координат.
21	Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.
22	Докажите, что точки $(-2; 3)$, $(1; 7)$, $(2; 3)$ и $(-4; -5)$ являются вершинами трапеции. Найдите уравнение средней линии трапеции.
23	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$ и отсекающей от оси OY отрезок, равный 7.
24	При каком значении m прямые $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$ и $mx + my - 8 = 0$ пересекаются в одной точке.
25	Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 135° ; б) 180° ; в) 270° .
26	Из точки $A(4; 3)$ под углом α к оси OX направлен луч света. Дойдя до оси, луч от нее отразился. Составить уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

27	Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$ и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$.
28	Диагонали ромба, равные 14 и 18, приняты за оси координат. Составить уравнения сторон ромба.
29	Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция, если $A(3; 6)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -3)$, $D(-5; 5)$.
30	Найти значение параметра λ , при котором прямая $y = 3x + \lambda$ отсекает на оси OX отрезок, равный 2.

Задание 3. Даны вершины треугольника ABC : $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Найти:

- уравнение стороны AB ;
- уравнение высоты CH ;
- уравнение медианы AM ;
- точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;
- уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
- расстояние от точки C до прямой AB .

Вариант	Точка A		Точка B		Точка C	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	-2	4	3	1	10	7
2	-3	-2	14	4	6	8
3	1	7	-3	-1	11	-3
4	1	0	-1	4	9	5
5	1	-2	7	1	3	7
6	-2	-3	1	6	6	1
7	-4	2	-6	6	6	2
8	4	-3	7	3	1	10
9	4	-4	8	2	3	8
10	-3	-3	5	-7	7	7
11	1	-6	3	4	-3	3
12	-4	2	8	-6	2	6
13	-5	2	0	-4	5	7
14	4	-4	6	2	-1	8
15	-3	8	-6	2	0	-5
16	6	-9	10	-1	-4	1
17	4	1	-3	-1	7	-3
18	-4	2	6	-4	4	10
19	3	-1	11	3	-6	2
20	-7	-2	-7	4	5	-5
21	-1	-4	9	6	-5	4
22	10	-2	4	-5	-3	1
23	-3	-1	-4	-5	8	1
24	-2	-6	-3	5	4	0
25	-7	-2	3	-8	-4	6
26	0	2	-7	-4	3	2
27	7	0	1	4	-8	-4
28	1	-3	0	7	-2	4
29	-5	1	8	-2	1	4
30	2	5	-3	1	0	4

Задание 4. Даны вершины треугольника ABC : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.
Найти:

- 1) уравнения сторон,
- 2) уравнения высот,
- 3) длины сторон,
- 4) уравнения медиан,
- 5) уравнения биссектрис,
- 6) центр и радиус вписанной окружности,
- 7) центр и радиус описанной окружности,
- 8) центр тяжести,
- 9) точку пересечения высот,
- 10) длины высот и медиан,
- 11) тангенсы углов треугольника,
- 12) площадь треугольника.

Вариант	Точка A		Точка B		Точка C	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	0	0	10	-5	6	3
2	1	1	11	-4	7	4
3	-1	1	9	-4	5	4
4	1	-1	11	-6	7	2
5	-1	-1	9	-6	5	2
6	1	1	-9	6	-5	-2
7	1	-1	-9	4	-5	-4
8	-1	-1	-11	4	-7	-4
9	1	1	21	-9	13	7
10	-1	1	19	-9	11	7
11	1	-1	21	-11	13	5
12	-1	-1	19	-11	11	5
13	-1	1	-21	11	-13	-5
14	1	-1	-19	9	-11	-7
15	-1	-1	-21	9	-13	-7
16	1	2	11	-3	7	5
17	-1	2	9	-3	5	5
18	1	-2	11	-7	7	1
19	1	2	-9	7	-5	-1
20	-1	2	-11	7	-7	-1
21	1	-2	-9	3	-5	-5
22	-1	-2	-11	3	-7	-5
23	1	2	21	-8	13	8
24	-1	2	19	-6	11	8
25	-1	-2	19	-12	11	4
26	-1	1	-11	6	-7	-2
27	1	1	-19	11	-11	-5
28	-1	-2	9	-7	5	1
29	1	-2	21	-12	13	4
30	-1	1	19	-9	11	7

Задание 5. Решить задачу.

Вариант	Условие задачи
1	Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями $2x - y + 5 = 0$ и $x - 2y + 4 = 0$, диагонали его пересекаются в точке $M(1; 4)$. Найти уравнение сторон CD и AD .
2	Даны две вершины треугольника $A(5; -2)$ и $B(-4; 1)$; его высоты пересекаются в точке $N(3; 2)$. Найти координаты третьей вершины C .
3	Даны вершины треугольника $A(2; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(3; 2)$. Составить уравнение высоты, опущенной на сторону BC , и медианы, проведенной к стороне AC .
4	Найти точку B , симметричную точке $A(4; -3)$ относительно прямой, проходящей через точки $M(1; -2)$ и $N(-3; 2)$.
5	Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма: $x - y - 1 = 0$; $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; -1)$. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.
6	Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 6)$ и составляющей с осью Ox угол, вдвое меньший угла, который составляет с осью Ox прямая $\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$.
7	Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3; -4)$ и уравнения двух высот: $7x - 2y - 1 = 0$ и $2x - 7y - 6 = 0$.
8	Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x + y + 6 = 0$ и $3x + 5y - 15 = 0$ и через точку $N(1; -2)$.
9	Найти проекцию точки $P(4; 5)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; -2)$ и $B(6; -1)$.
10	Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла $C(3; -1)$ и уравнение гипотенузы $3x - y + 2 = 0$.
11	Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M(-1; 2)$ под углом 45° к прямой $x - 2y + 3 = 0$.
12	Даны уравнения сторон параллелограмма $ABCD$: $AB: 3x + 4y - 12 = 0$, $AD: 5x - 12y - 6 = 0$ и середина $E(-2; 1)$ стороны BC . Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.
13	Вершины треугольника $A(1; 4)$, $B(2; 5)$, $C(5; -2)$. Найдите точку пересечения стороны AB с перпендикуляром, восстановленным из середины стороны AC .
14	В треугольнике ABC даны: уравнение стороны $AB: 3x + 2y = 12$, уравнение высоты $BM: x + 2y = 4$, уравнение высоты $AM: 4x + y = 6$, где M – точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AC и BC .
15	В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла $(1; -2)$ и уравнение противолежащего катета: $3x - 4y + 2 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.
16	Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -7)$, а также уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из различных вершин.

17	Найти проекцию точки $M(1; 1)$ на прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2}$.
18	Даны две смежные вершины $A(5; -2)$ и $B(3; 1)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(0; 2)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон BC и CD и прямой, проходящей через точку Q параллельно стороне BC .
19	Вычислить координаты вершины ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x + 2y = 4$ и $x + 2y = 10$, и уравнение одной из его диагоналей: $y = x + 2$.
20	Вершины треугольника $A(2; 0)$, $B(5; 3)$, $C(3; 7)$. Найти уравнение прямой, проходящей через вершину B и параллельной медиане AM треугольника.
21	Через точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $x - 3y + 4 = 0$ провести прямую, которая, кроме того, 1) проходит через начало координат; 2) параллельна оси абсцисс; 3) параллельна оси ординат; 4) проходит через точку $(4; 3)$.
22	Вершины треугольника $A(2; -1)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и центр тяжести треугольника ABC .
23	Найти точку N , симметричную точке $M(0; -3)$ относительно прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1}$.
24	Дано уравнение $3x + 4y - 12 = 0$ стороны AB параллелограмма $ABCD$, уравнение $x + 12y - 12 = 0$ диагонали AC и середина $E(-2; \frac{13}{6})$ стороны BC . Найти уравнения сторон BC , CD и AD .
25	Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -4)$ и а) параллельной прямой $2x - 3y = 1$; б) перпендикулярной прямой $5x - 7y + 3 = 0$.
26	В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB : $3x - 4y + 5 = 0$, уравнение высоты AM : $x + 2y - 10 = 0$ и высоты BN : $2x - 3y + 4 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.
27	Вершины треугольника $A(0; 4)$, $B(2; -3)$, $C(-4; 5)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C на медиану, проведенную из вершины A .
28	Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $C(1; 2)$, а также уравнения высоты $x - 2y + 1 = 0$ и медианы $4x + y + 2 = 0$, проведенных из одной вершины.
29	Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y + 3 = 0$ и $3x + 5y + 11 = 0$ и через точку $A(2; 1)$.
30	Вершины треугольника $A(-3; 3)$, $B(5; 1)$, $C(6; -2)$. Составить уравнения: а) медианы, проведенной из вершины C ; б) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC .

Задание 6. Решить задачу.

Вариант	Условие задачи
1	В треугольнике ABC даны вершина $A(-1; -1)$ и две высоты: $2x + y - 27 = 0$ и $2x - y - 17 = 0$. Найти вершины B и C , уравнение и длину третьей высоты, углы треугольника, радиус описанного круга, уравнение биссектрисы из точки C и медианы из точки B .
2	Даны вершины треугольника ABC : $A(-1; 1)$, $B(-21; 11)$; $C(-13; -5)$. Найти: уравнения и длины сторон, уравнения медианы и биссектрисы из точки A , уравнение и длину высоты из точки C , центр тяжести.
3	Даны уравнения трех сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y + 5 = 0$; $(AB): x + 2y - 3 = 0$; $(BC): 2x + y + 15 = 0$. Найти: вершины A и C , уравнения и длины высот из этих вершин, уравнение медианы и биссектрисы из точки B , площадь треугольника и его углы.
4	Даны две вершины треугольника ABC : $A(1; 1)$ и $B(-19; 11)$, а также центр вписанного круга $K(-9; 1)$. Найти: уравнение и длину стороны AB , уравнение биссектрисы из точки A , радиус вписанного круга, угол A , уравнение высоты из точки C и уравнение медианы из точки B .
5	Даны уравнения трех сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y + 1 = 0$; $(AB): x + 2y - 3 = 0$; $(BC): 2x + y - 18 = 0$. Найти: вершины A и C , длину стороны AC , уравнение высоты и медианы из точки C и биссектрисы из точки B .
6	Найти уравнение стороны AB треугольника ABC , ее длину, уравнение высоты из точки C , центр и радиус описанного круга, углы треугольника, если даны вершины $A(1; -1)$, $B(21; -11)$ и точка пересечения медиан $M(35/3; -7/3)$.
7	Даны уравнения двух сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y + 3 = 0$; $(AB): x + 2y - 1 = 0$ и две высоты треугольника: $4x - 8y + 12 = 0$ и $2x - y - 15 = 0$. Найти вершины треугольника ABC , уравнение и длину стороны BC , уравнение третьей высоты, углы треугольника и его площадь.
8	Даны две вершины треугольника ABC : $A(1; 1)$, $B(21; -9)$ и точка пересечения высот $K(13; 7)$. Найти: уравнения и длины сторон, уравнения высот, уравнение медианы из точки A , центр тяжести и углы.
9	Даны две вершины треугольника ABC : $A(1; -2)$ и $B(21; -12)$, а также центр вписанного круга $K(11; -2)$. Найти: вершину C , уравнения и длины сторон, уравнения биссектрис, радиус вписанного круга и углы.
10	Даны вершины треугольника ABC : $A(1; 2)$, $B(-9; 7)$; $C(-5; -1)$. Найти: уравнения и длины сторон AB и AC , уравнение биссектрисы из точки A , уравнение высоты из точки C , центр тяжести и его углы.
11	Даны две вершины треугольника ABC : $A(1; -2)$, $B(-9; 3)$ и точка пересечения высот $K(-5; -5)$. Найти: уравнения и длины сторон, уравнение высоты из точки C , уравнения биссектрисы и медианы из точки A , площадь треугольника.
12	Найти уравнения сторон треугольника ABC , уравнение высоты из точки C , уравнение биссектрисы из точки A и углы, если даны вершины $A(-1; -1)$, $B(9; -6)$ и точка пересечения медиан $M(13/3; -5/3)$.

13	Даны уравнения трех сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y - 3 = 0$; $(AB): x + 2y + 1 = 0$; $(BC): 2x + y + 29 = 0$. Найти: вершины треугольника, длины сторон AC и BC , уравнение биссектрисы из точки C , уравнение высоты из точки A , площадь треугольника.
14	Даны уравнения двух сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y + 3 = 0$; $(AB): x + 2y - 5 = 0$ и две высоты треугольника: $3x - 6y + 9 = 0$ и $2x - y - 9 = 0$. Найти вершины треугольника ABC , уравнение и длину стороны BC , уравнение третьей высоты, уравнение медианы из точки A , углы треугольника и центр тяжести.
15	Даны две вершины треугольника ABC : $A(-1; 1)$, $B(9; -4)$ и точка пересечения высот $K(5; 4)$. Найти: вершину C , уравнения и длины сторон, уравнение медианы из точки C , уравнения биссектрисы из точки A , центр описанной окружности и ее радиус.
16	Найти вершину C , уравнения и длины сторон треугольника ABC , уравнения высот, уравнение медианы из точки A , центр тяжести и углы, если даны вершины $A(-1; 2)$, $B(9; -3)$ и точка пересечения медиан $M(13/3; 4/3)$.
17	Даны уравнения двух сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y - 3 = 0$; $(AB): x + 2y + 1 = 0$ и две высоты треугольника: $6x - 12y - 18 = 0$ и $2x - y - 12 = 0$. Найти вершины треугольника ABC , уравнения и длины сторон, уравнение третьей высоты, уравнение медианы из точки A , уравнение биссектрисы из точки B , площадь треугольника.
18	В треугольнике ABC даны вершина $A(1; 1)$ и две высоты: $2x + y + 12 = 0$ и $2x - y + 8 = 0$. Найти вершины B и C , уравнения и длины сторон, уравнение третьей высоты, углы треугольника, уравнение биссектрисы из точки C и площадь.
19	Даны две вершины треугольника ABC : $A(-1; 1)$ и $B(-11; 6)$, а также центр вписанного круга $K(-6; 1)$. Найти: вершину C , уравнения и длины сторон, уравнение биссектрисы из точки A , уравнение высоты из точки C , уравнение медианы из точки B , центр тяжести, площадь и углы.
20	В треугольнике ABC даны вершина $A(-1; 2)$ и две высоты: $2x + y - 30 = 0$ и $2x - y - 14 = 0$. Найти вершины B и C , уравнения и длины сторон AB и AC , уравнение третьей высоты, углы треугольника, центр и радиус описанного круга, уравнение биссектрисы из точки A и медианы из точки B , углы и площадь.
21	Найти вершину C , уравнения и длины сторон треугольника ABC , уравнения высот, уравнение медианы из точки A , центр и радиус описанного круга, площадь и углы, если даны вершины $A(1; 2)$, $B(21; -8)$ и точка пересечения медиан $M(35/3; 2/3)$.
22	Даны уравнения двух сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y - 3 = 0$; $(AB): x + 2y + 5 = 0$ и две высоты треугольника: $2x - 4y - 6 = 0$ и $2x - y + 9 = 0$. Найти вершины треугольника ABC , уравнение третьей стороны, длины сторон, уравнение и длину третьей высоты, уравнение медианы из точки B , уравнения биссектрис из точки A и точки B , радиус вписанного круга, углы и площадь треугольника.
23	Даны уравнения трех сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y - 1 = 0$; $(AB): x + 2y + 3 = 0$; $(BC): 2x + y + 18 = 0$. Найти: Вершины, длины сторон, уравнения высот из точки A и точки C , уравнение медианы из точки A и биссектрисы из точки B , центр тяжести, центр и радиус описанной окружности и его углы.

24	Даны вершины треугольника ABC : $A(-1; -2)$, $B(19; -12)$; $C(11; 4)$. Найти: уравнения и длины сторон, уравнение медианы из точки B , уравнения высот из точки A и точки B , биссектрисы из точки C , центр тяжести и площадь.
25	Даны вершины треугольника ABC : $A(1; -2)$, $B(11; -7)$; $C(7; 1)$. Найти: уравнения и длины сторон, уравнения медианы и биссектрисы из точки B , уравнения и длину высоты из точки A , центр и радиус вписанного круга.
26	Найти вершину C , уравнения и длины сторон треугольника ABC , уравнения высот, уравнение медианы из точки A , уравнение биссектрисы из точки C и углы, если даны вершины $A(0; 0)$, $B(10; -5)$ и точка пересечения медиан $M(16/3; -2/3)$.
27	Даны уравнения двух сторон треугольника ABC : $(AC): x - 2y - 3 = 0$; $(AB): x + 2y + 1 = 0$ и две высоты треугольника: $4x - 8y - 12 = 0$ и $2x - y + 6 = 0$. Найти вершины треугольника ABC , уравнение и длину стороны BC , уравнение третьей высоты, центр и радиус вписанного круга и его площадь.
28	Даны две вершины треугольника ABC : $A(-1; -1)$ и $B(-21; 9)$, а также центр вписанного круга $K(-11; -1)$. Найти: вершину C , уравнения и длины сторон, уравнение биссектрисы из точки A , уравнение высоты из точки C , уравнение медианы из точки B , центр тяжести, площадь и углы.
29	Даны вершины треугольника ABC : $A(-1; -2)$, $B(9; -7)$; $C(5; 1)$. Найти: уравнения и длины сторон, уравнение медианы точки C , уравнения высот из точки A и точки B , площадь и углы.
30	Даны вершины треугольника ABC : $A(1; 2)$, $B(-9; 7)$; $C(-5; -1)$. Найти: уравнения и длины сторон AB и AC , уравнение биссектрисы из точки A , уравнение высоты из точки C , центр тяжести и его углы.

Задание 7. Дано уравнение кривой второго порядка.

Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы). Построить данную кривую.

Вариант	Задание	Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$x^2 + 4y^2 = 16$	11	$9x^2 - y^2 = 9$	21	$x^2 - 64y^2 = 16$
2	$4x^2 - y^2 = 16$	12	$x^2 + 9y^2 = 36$	22	$-4x^2 + 16y^2 = 64$
3	$4x^2 + 25y^2 = 100$	13	$x^2 + 4y^2 = 36$	23	$x^2 + 4y^2 = 64$
4	$4x^2 + 9y^2 = 36$	14	$5x^2 + 20y^2 = 80$	24	$-x^2 + 4y^2 = 4$
5	$9x^2 - 4y^2 = 36$	15	$-x^2 + y^2 = 1$	25	$4x^2 - y^2 = 1$
6	$25x^2 - 4y^2 = 100$	16	$-4x^2 + y^2 = 1$	26	$x^2 + 25y^2 = 100$
7	$4x^2 - 9y^2 = 36$	17	$x^2 + 4y^2 = 1$	27	$-x^2 + y^2 = 9$
8	$4x^2 + y^2 = 16$	18	$x^2 - y^2 = 1$	28	$16x^2 + y^2 = 64$
9	$x^2 - 4y^2 = 16$	19	$9x^2 + y^2 = 9$	29	$4x^2 - y^2 = 1$
10	$x^2 - y^2 = 4$	20	$-x^2 + 9y^2 = 9$	30	$x^2 + 4y^2 = 1$

Задание 8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы. Используемые обозначения: A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

Вариант	Эллипс	Гипербола	Парабола
1	$b = 15$ $F(-10; 0)$	$a = 13$ $\varepsilon = 14/13$	$D: x = -4$
2	$b = 2$ $F(4\sqrt{2}; 0)$	$a = 7,$ $\varepsilon = \sqrt{85}/7$	$D: x = 5$
3	$A(3; 0),$ $B(2; \sqrt{5}/3)$	$k = 3/4$ $\varepsilon = 5/4$	$D: y = -2$
4	$\varepsilon = \sqrt{21}/5,$ $A(-5; 0)$	$A(\sqrt{80}; 3)$ $B(4\sqrt{6}; 3\sqrt{2})$	$D: y = 1$
5	$a = 11$ $\varepsilon = \sqrt{57}/11$	$k = 2/3$ $c = 5\sqrt{13}$	$A(27; 9)$ ось симметрии OX
6	$b = \sqrt{15}$ $\varepsilon = \sqrt{10}/25$	$k = 3/4$ $a = 8$	$A(4; -8)$ ось симметрии OX
7	$a = 4$ $F(3; 0)$	$b = 2\sqrt{10}$ $F(-11; 0)$	$D: x = -2$
8	$b = 4$ $F(9; 0)$	$a = 5$ $\varepsilon = 7/5$	$D: x = 6$
9	$A(0; \sqrt{3})$ $B(\sqrt{14}/3; 1)$	$k = \sqrt{21/10}$ $\varepsilon = 11/10$	$D: y = -4$
10	$\varepsilon = 7/8, A(8; 0)$	$A(3; -\sqrt{3/5})$ $B(\sqrt{13/5}; 6)$	$D: y = 4$
11	$a = 12$ $\varepsilon = \sqrt{22}/6$	$k = \sqrt{2/3}$ $c = 5$	$A(-7; 7)$ ось симметрии OX
12	$b = 2$ $\varepsilon = 5\sqrt{29}/29$	$k = 12/13$ $a = 13$	$A(-5; 15)$ ось симметрии OX
13	$a = 6$ $F(-4; 0)$	$b = 3$ $F(7; 0)$	$D: x = -7$
14	$b = 7$ $F(5; 0)$	$a = 11,$ $\varepsilon = 12/11$	$D: x = 10$

15	$A(-\sqrt{17}/3; 1/3)$ $B(\sqrt{21}/2; 1/2)$	$k = 1/2$ $\varepsilon = \sqrt{5}/2$	$D: y = -1$
16	$\varepsilon = 3/5,$ $A(0; 8)$	$A(\sqrt{6}; 0),$ $B(-\sqrt{2}/2; 1)$	$D: y = 9$
17	$a = 11$ $\varepsilon = 10/11$	$c = 6$ $k = \sqrt{11}/5$	$A(-7; 5)$ ось симметрии OX
18	$b = 5$ $\varepsilon = 12/13$	$k = 1/3$ $a = 3$	$A(-9; 6)$ ось симметрии OY
19	$a = 9$ $F(-7; 0)$	$b = 6$ $F(12; 0)$	$D: x = -1/4$
20	$b = 5$ $F(-10; 0)$	$a = 9$ $\varepsilon = 4/3$	$D: x = 12$
21	$A(0; -2)$ $B(\sqrt{15}/2; 1)$	$k = 2\sqrt{10}/9$ $\varepsilon = 11/9$	$D: y = 5$
22	$\varepsilon = 2/3,$ $A(-6; 0)$	$A(\sqrt{8}; 0)$ $B(\sqrt{20}/3; 2)$	$D: y = 1$
23	$a = 25$ $\varepsilon = 3/5$	$k = \sqrt{29}/14$ $c = 15$	$A(4; 1)$ ось симметрии OY
24	$b = 2\sqrt{15}$ $\varepsilon = 7/8$	$k = 5/6$ $a = 6$	$A(-2; 3\sqrt{2})$ ось симметрии OY
25	$a = 13$ $F(-5; 0)$	$b = 44$ $F(-7; 0)$	$D: x = -3/8$
26	$b = 7$ $F(13; 0)$	$k = \sqrt{2}/3$ $\varepsilon = \sqrt{15}/3$	$D: x = 13$
27	$A(-3; 0)$ $B(1; \sqrt{40}/3)$	$b = 4$ $F(-11; 0)$	$D: y = 4$
28	$\varepsilon = 5/6,$ $A(0; -\sqrt{11})$	$A(\sqrt{32}/3; 1)$ $B(\sqrt{8}; 0)$	$D: y = -3$
29	$a = 15$ $\varepsilon = 15/17$	$k = \sqrt{17}/8$ $c = 9$	$A(4; -10)$ ось симметрии OY
30	$b = 2\sqrt{2}$ $\varepsilon = 7/9$	$k = \sqrt{2}/2$ $a = 6$	$A(-2; 3\sqrt{2})$ ось симметрии OY

Задание 9. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A . Сделать чертеж.

Вариант	Условие задания
1	Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0; -2)$
2	Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0; 4)$
3	Фокусы гиперболы $24y^2 - 25x^2 = -600$, $A(0; -8)$
4	$O(0, 0)$, A – вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$
5	Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, $A(0; 6)$
6	Левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0; -3)$
7	Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A – его верхняя вершина
8	Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0; -2)$
9	Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0; -4)$
10	$O(0, 0)$, A – вершина параболы $y^2 = -(x + 5)/2$
11	Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(1; 7)$
12	Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0; 6)$
13	Фокусы эллипса $16x^2 + 41y^2 = 656$, A – его нижняя вершина
14	Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0; 4)$
15	Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0; 5)$
16	$B(1; 4)$, A – вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$
17	Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1; -3)$
18	Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0; -6)$
19	Фокусы эллипса $24x^2 + 25y^2 = 600$, A – его верхняя вершина
20	Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, $A(1; 3)$
21	Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1; -2)$
22	$B(2, -5)$, A – вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$
23	Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2, -7)$
24	Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2; 5)$
25	Фокус эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A – его нижняя вершина
26	Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5; -2)$
27	Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, $A(0; -6)$
28	$B(3, 4)$, A – вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$
29	Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 637$, $A(1; 8)$
30	Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $A(2; 8)$

Задание 10. Решить задачу.

Вариант	Условие задачи
1	Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$.
2	Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанный параболой $y^2 = 2x$.
3	Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 0,8, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы.
4	Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{40}; 2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm \frac{1}{3}x$.
5	В эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.
6	Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5; 0)$ и $B(1; 4)$, если центр ее лежит на прямой $x + y = 3$.
7	Вычислить расстояние от центра окружности $x^2 + y^2 = 10x$ до асимптот гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.
8	Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8.
9	Найти расстояние от фокуса параболы $y = \frac{1}{8}x^2$ до прямой $3x + 4y + 2 = 0$.
10	Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon = 3/2$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$.
11	Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанной параболой $y^2 = 2x$.
12	Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы.
13	Найти точки пересечения параболы $y^2 = x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси OX и радиус, равный 5.
14	Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого

	го совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2 - y^2 = 8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с гиперболой $8x^2 - y^2 = 8$.
15	Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы.
16	Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.
17	Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3; -1)$, и ее действительная ось лежит на оси OX , а центр – в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2 + y^2 = 10$.
18	Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат, центр которой совпадает с фокусом параболы $y^2 = 8x$.
19	Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.
20	Найти точки пересечения параболы $y^2 = 4x$ с прямой, проходящей через фокус этой параболы параллельно ее директрисе.
21	Через правый фокус гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Определить точки пересечения этих прямых с гиперболой.
22	Фокусы гиперболы лежат в точках $F_1(-\sqrt{7}; 0)$ и $F_2(\sqrt{7}; 0)$. Гипербола проходит через точку $A(2; 0)$. Найти уравнения ее асимптот.
23	Найти параметр p параболы $y^2 = 2px$, если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 = 6x$.
24	Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4; 6)$ и имеющего фокусы, которые совпадают с фокусами данной гиперболы.
25	Найти точки пересечения параболы $y^2 = 8x$ с эллипсом, у которого правый фокус совпадает с фокусом этой параболы, большая полуось равна 4 и фокусы лежат на оси OX .
26	Написать уравнение такой окружности, чтобы ее диаметром оказался отрезок прямой $x + y = 4$, заключенный между осями координат.

27	Большая ось эллипса втрое больше его малой оси. Составить каноническое уравнение этого эллипса, если он проходит через точку $M(3; \sqrt{3})$.
28	Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 2$ с прямой $x + y - 2 = 0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы.
29	Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ при условии, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 1,25$.
30	Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M(3; 0)$ и $N(-1; 2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $x - y + 2 = 0$.

Задание 11. Решить задачу.

Вариант	Условие задачи
1	Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $A(2; 1)$ и $B(-1; 4)$.
2	Найти геометрическое место точек, которые отстоят от точек $A(1; 0)$ вдвое ближе, чем от точки $B(4; 0)$.
3	Найти траекторию точки, которая при своем движении остается в 1,5 раза дальше от точки $F(0; 6)$, чем от прямой $y = 8$.
4	Составить уравнение геометрического места точек разность квадратов расстояний которых до точек $A(-a; 0)$ и $B(a; 0)$ равна C .
5	Составить уравнение геометрического места точек, для которых отношение расстояния до данной точки $F(-5; 0)$ к расстоянию до прямой $5x + 16 = 0$ равно $5/4$.
6	Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0; 2)$ и от прямой $y - 4 = 0$.
7	Составить уравнение множества точек, расстояния которых от точки $A(0; 1)$ в два раза меньше расстояния до прямой $y - 4 = 0$.
8	Составить уравнение геометрического места точек, находящихся от точки $A(3; 0)$ вдвое ближе, чем от прямой $x = 12$.
9	Вывести уравнение геометрического места точек, для которых отношение расстояния до данной точки $F(4; 0)$ к расстоянию до прямой $4x + 25 = 0$ равно $4/5$.
10	Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x = 1$, чем к точке $F(4; 0)$.
11	Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $B(3; 0)$ относятся как 2:1.
12	Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $A(2; 3)$ и $B(-3; 5)$.
13	Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(-8; 0)$, чем от прямой $x = -2$.

14	Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5; 0)$ относятся как 2:1.
15	Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении вдвое ближе к прямой $x - 2 = 0$, чем к точке $F(8; 0)$.
16	Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $B(2; 4)$ и от прямой $y + 3 = 0$.
17	Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1; 0)$ вдвое меньше расстояния ее от прямой $x = -4$.
18	Найти геометрическое место точек, которые отстоят от точки $A(2; 0)$ вдвое ближе, чем от точки $B(6; 0)$.
19	Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0; 3)$ и от прямой $y - 6 = 0$.
20	Найти геометрическое место точек, находящихся от точки $B(2; 0)$ вдвое ближе, чем от прямой $x - 8 = 0$.
21	Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $B(7,5; 0)$ относятся, как 1:2.
22	Найти уравнение линии, состоящей из всех точек плоскости, произведение расстояний которых до двух данных точек $F_1(a; 0)$ и $F_2(-a; 0)$ есть постоянная величина a^2 .
23	Написать уравнение геометрического места точек, разность расстояний которых от точек $F_1(-1; -1)$ и $F_2(1; 1)$ равна 2.
24	Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(3; 1)$ и от прямой $y = -2$.
25	Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1; 0)$, чем к прямой $x + 4 = 0$.
26	Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $F(0, \frac{1}{4})$ равно расстоянию этой же точки от прямой $y + \frac{1}{4} = 0$.
27	Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(2; 1)$ и от прямой $y = -1$.
28	Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $B(-2; 0)$ вдвое меньше расстояния ее от прямой $x = -4$.
29	Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается втрое ближе к точке $A(1; 0)$, чем к прямой $x - 9 = 0$.
30	Написать уравнение геометрического места точек, разность расстояний каждой из которых от точек $F_1(-2; -2)$, $F_2(2; 2)$ равна 4.

Задание 12. Построить линии, определяющиеся следующими уравнениями:

Вариант	Условие	Вариант	Условие
1	$y = + \frac{2}{3} \sqrt{x^2 - 9}$	2	$y = -1 + \frac{2}{3} \sqrt{x^2 - 4x - 5}$
3	$x = 4 - 3 \sqrt{y + 5}$	4	$x = 2 \sqrt{-5 - 6y - y^2}$
5	$x = -\frac{2}{3} \sqrt{9 - y^2}$	6	$y = -5 - \sqrt{-3x - 21}$

7	$y = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2+9}$	8	$y = -\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$
9	$y = 7 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2-6x+13}$	10	$x = -2 + \sqrt{6-2y}$
11	$y = 3 - 4\sqrt{x-1}$	12	$y = -3\sqrt{x^2+1}$
13	$x = -2\sqrt{-5-6y-y^2}$	14	$x = 4 + 2\sqrt{y^2+4y+8}$
15	$x = \frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$	16	$y = -3 + 4\sqrt{x-1}$
17	$x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$	18	$y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$
19	$y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$	20	$x = -4 + 3\sqrt{y+5}$
21	$y = +\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$	22	$y = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$
23	$x = 9 - 2\sqrt{y^2+4y+8}$	24	$y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$
25	$x = 2 - \sqrt{6-2y}$	26	$y = -\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$
27	$y = 3\sqrt{x^2+1}$	28	$x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2+4y-12}$
29	$y = 5 + \sqrt{-3x-21}$	30	$y = \frac{4}{3}\sqrt{x^2+9}$

Задание 13. Определить вид кривой, найти основные параметры (для окружности – центр и радиус; для эллипса – оси, координаты фокусов, эксцентриситет; для параболы – координаты вершины, фокуса и уравнение директрисы; для гиперболы – оси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот).

Сделать чертеж.

Вариант	Задание 1	Задание 2
1	$x^2 - x + 8 = y$	$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$
2	$x^2 - 5x + 1 = y$	$x^2 + 7y^2 - 11 = 0$
3	$5x^2 + y^2 - 12 = 0$	$x^2 + 7x - 6 = y$
4	$8x^2 - y^2 = 16$	$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 23 = 0$
5	$3x^2 - 20y^2 = 40$	$y^2 + 3y + 6 = x$
6	$x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$	$x^2 + 7y^2 - 11 = 0$
7	$x^2 - 4x + y^2 + 4y - 8 = 0$	$y^2 + 7y = x$
8	$x^2 - x + 8 = y$	$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$
9	$x^2 - 5y^2 = 4$	$2x^2 - 5y^2 = 10$
10	$x^2 + 3x + 6 = y$	$6x^2 + 3y^2 - 50 = 0$
11	$6x^2 + 3y^2 - 50 = 0$	$x^2 + 3x + 6 = y$

12	$x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0$	$x^2 + 4x - 6 = y$
13	$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 11 = 0$	$y^2 + y - 4 = x$
14	$x^2 + 7y^2 - 11 = 0$	$y^2 - 9y = x + 3$
15	$6x^2 + 3y^2 - 50 = 0$	$x^2 + 7x - 6 = y$
16	$x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0$	$6x^2 - y^2 = 10$
17	$x^2 - 4x + y^2 + 4y - 8 = 0$	$y^2 + 3y + 6 = x$
18	$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 23 = 0$	$y^2 - 9y = x + 3$
19	$x^2 + 8y^2 - 100 = 0$	$x^2 + 11y = x - 10$
20	$y^2 + y - 4 = x$	$2x^2 + 7y^2 - 60 = 0$
21	$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$	$x^2 - 5y^2 = 4$
22	$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$	$x^2 - x + 8 = y$
23	$x^2 + 3x + 6 = y$	$x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$
24	$y^2 + 7y = x$	$10x^2 + 4y^2 - 55 = 0$
25	$6x^2 + y^2 - 48 = 0$	$x^2 - x + 8 = y$
26	$y^2 - 9y = x + 3$	$x^2 - 5y^2 = 4$
27	$x^2 + 11y = x - 10$	$2x^2 - 5y^2 = 10$
28	$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 11 = 0$	$x^2 - 5x + 1 = y$
29	$x^2 - 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$	$y^2 + y - 4 = x$
30	$x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$	$8x^2 - y^2 = 16$

Задание 14. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

Вариант	Задание
1	$9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0$
2	$4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$
3	$y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$
4	$9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$
5	$-9x^2 + 16y^2 + 54x + 32y - 209 = 0$
6	$y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$
7	$x^2 - 4x + 4y = 0$
8	$9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$
9	$x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$
10	$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$
11	$-4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 31 = 0$
12	$2x^2 + 4x - y - 1 = 0$
13	$y^2 - 2y - x - 1 = 0$

14	$3x^2 - 6x + y + 1 = 0$
15	$4y^2 + x + 8y - 1 = 0$
16	$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
17	$-9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 32 = 0$
18	$9x^2 - 16y^2 + 90x + 64y + 161 = 0$
19	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 9 = 0$
20	$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 32 = 0$
21	$4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 11 = 0$
22	$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$
23	$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$
24	$4x^2 - 9y^2 - 40x - 36y + 28 = 0$
25	$y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$
26	$2x^2 + 4x - y - 1 = 0$
27	$9x^2 + y^2 + 90x - 4y + 193 = 0$
28	$x^2 - y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$
29	$4x^2 - 3y^2 - 48x + 12y + 120 = 0$
30	$x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$

Задание 15. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Изобразить кривую на чертеже в старой и в новой системах координат.

Вариант	Задание	
1	$x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y - 11 = 0$	$2xy - 4x + 2y - 3 = 0$
2	$7x^2 - 10xy + 7y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$	$x^2 - 6xy + y^2 - 8x + 8y + 8 = 0$
3	$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 15 = 0$	$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$
4	$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$	$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
5	$x^2 + 2xy - 3y^2 + x + 3y = 0$	$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$
6	$x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x - 6y = 0$	$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$
7	$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$	$11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$
8	$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 2x - 11y + 8 = 0$	$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$
9	$3x^2 + 4xy - 4x - 8y = 0$	$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
10	$3x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + 2y + 5 = 0$	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
11	$4x^2 + 6xy + 4y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$	$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$
12	$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0$	$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$
13	$2x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$

14	$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 4y - 2 = 0$	$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$
15	$x^2 - 2xy + y^2 + x - 8y + 7 = 0$	$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$
16	$19x^2 - 24xy + y^2 + 14x - 22y - 29 = 0$	$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$
17	$21x^2 - 16xy + 9y^2 + 16x - 18y - 16 = 0$	$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$
18	$x^2 + 2xy + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$	$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
19	$11x^2 - 16xy - y^2 - 26x - 22y - 61 = 0$	$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$
20	$13x^2 - 8xy + 7y^2 + 18x + 6y - 3 = 0$	$xy + 3x - 3y - 9 = 0$
21	$4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 20 = 0$	$3x^2 - 4xy + 4 = 0$
22	$7x^2 + 12xy - 2y^2 + 4x + 32y - 38 = 0$	$x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$
23	$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$	$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$
24	$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16x + 16y + 24 = 0$	$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$
25	$4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$	$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
26	$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$	$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 2y + 11 = 0$
27	$2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$	$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$
28	$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 13y + 10 = 0$	$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0$
29	$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$	$3x^2 + 4xy - 4x - 8y = 0$
30	$4x^2 + 10xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$	$19x^2 - 24xy + y^2 + 14x - 22y - 29 = 0$

Задание 16. Линия задана в полярной системе координат:

- 1) записать ее уравнение в декартовых координатах;
- 2) построить эту линию.

Вариант	Уравнение линии	Вариант	Уравнение линии
1	$r(3 \cos \varphi - 2 \sin \varphi) = 6$	16	$4(1 + r^2 \sin^2 \varphi) = r \cos \varphi$
2	$r = 2 \sin \varphi$	17	$r^2 \cos 2\varphi = 4$
3	$r = \cos \varphi + \sin \varphi$	18	$r^2(9 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi) = 36$
4	$r = 4 \cos \varphi$	19	$r = 2(1 - \cos \varphi)$
5	$r(2 \sin \varphi + \cos \varphi) = 4$	20	$2(r^2 \cos^2 \varphi - 1) = r \sin \varphi$
6	$r = \frac{9}{5 - 4 \cos \varphi}$	21	$r = \frac{9}{4 - 5 \sin \varphi}$
7	$r = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$	22	$r = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \varphi}$
8	$r^2 = 4 \cos 2\varphi$	23	$r = 4 \sin \varphi$
9	$r = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi}$	24	$r = \frac{1}{2 - 2 \sin \varphi}$
10	$r = 6 \cos \varphi$	25	$r(5 \sin \varphi - \cos \varphi) = 10$

11	$r = \frac{3}{1 - \sin \varphi}$	26	$r = \frac{1}{2 - 3 \sin \varphi}$
12	$r = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \sin \varphi}$	27	$r = \frac{1}{2 - \sqrt{5} \cos \varphi}$
13	$r = \frac{1}{2 - \sqrt{5} \sin \varphi}$	28	$r = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \varphi}$
14	$r = 2(\cos \varphi + \sin \varphi)$	29	$r = 3(1 + \cos \varphi)$
15	$r = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$	30	$r = \frac{9}{5 - 4 \sin \varphi}$

Задание 17. Линия задана параметрически:

- 1) записать ее уравнение в декартовых координатах;
- 2) построить эту линию.

Вариант	Уравнение линии	Вариант	Уравнение линии
1	$\begin{cases} x = 2t^2 - 1, \\ y = -5t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = 2 \cos t - 3, \\ y = 2 \sin t + 1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 2 \cos t - 1, \\ y = 3 \sin t + 2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = \cos^2 t - 1, \\ y = \sin^2 t + 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 3 - 3t^2 + t, \\ y = 4 - t^2 + \frac{t}{3} \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = -5t + 1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = -\frac{3}{t + 2} \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = 3 \cos t - 4, \\ y = \sin t + 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \cos t - 3, \\ y = \sin t + 4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 3t, \\ y = -t^2 + 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = 4t^2 - 1, \\ y = -t \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = 3 \cos^2 t + 1, \\ y = 2 - 3 \sin^2 t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = \sin t + 3 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = 3 - t^2 + t, \\ y = 4 + 3t^2 - 3t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t - 1, \\ y = \sin^2 t + 4 \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = 5 - 3 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ 3y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = \frac{\cos t - 1}{3}, \\ y = \frac{\sin t + 1}{3} \end{cases}$

10	$\begin{cases} x = 3 \cos^2 t - 5, \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = -2t - 2, \\ y = -\frac{3}{t+1} \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = \frac{\cos t - 1}{2}, \\ y = \frac{\sin t + 1}{3} \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = -t^2 + 1 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = 4 - 3t^2 - 6t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = \cos t - 1, \\ y = 4 \sin t - 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = 1 + (e^x + e^{-x}), \\ y = 1 - (e^x - e^{-x}) \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t + 4 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = (e^x + e^{-x}) + 3, \\ y = (e^x - e^{-x}) - 2 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = 5t^2 + \frac{5}{3}t - 3, \\ y = 3t^2 + t + 3 \end{cases}$

Задание 18. На миллиметровой бумаге формата А4 (или в любом графическом редакторе) изобразить с шагом $\frac{\pi}{8}$ (взяв произвольные a и b) следующие кривые, заданные в полярной системе координат:

$r = a$ – центральную окружность;

$r = 2a \cos \varphi$ – правую (левую) окружность при $a > 0$ и $a < 0$;

$r = 2a \sin \varphi$ – верхнюю (нижнюю) окружность при $a > 0$ и $a < 0$;

$r = a\varphi$ – спираль Архимеда;

$r = \frac{a}{\varphi}$ – гиперболическую спираль;

$r = a^\varphi$ – логарифмическую спираль ($a > 0$, $a \neq 1$);

$r = a \sin 3\varphi$, $r = a \cos 3\varphi$ – трехлепестковые розы;

$r = a \sin 2\varphi$, $r = a \cos 2\varphi$ – четырехлепестковые розы;

$r = a \cos \varphi + b$ – улитку Паскаля;

$r = a(1 \pm \cos \varphi)$ – кардиоиду;

$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ – лемнискату Бернулли.

Задание 19. Построить следующие плоскости:

Вариант	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
1	$2x + 3y + z - 1 = 0$	$2x + y - 4z = 0$	$4x - 3y + 6 = 0$	$3y + z = 0$
2	$4x - 3y - 6z - 12 = 0$	$4x - y - 5z = 0$	$2x + 3z - 18 = 0$	$5y - z = 0$

3	$2x + y - 4z + 2 = 0$	$2x + 3y + 3z = 0$	$2x + y + 2 = 0$	$4x - 5z = 0$
4	$4x - y - 2z + 4 = 0$	$2x - y - 2z = 0$	$2y - z - 1 = 0$	$2x + 3y = 0$
5	$3x - 6y + z + 3 = 0$	$3x - 2y + z = 0$	$x - y - 8 = 0$	$2y + 5z = 0$
6	$4x - 3y + 4z + 1 = 0$	$3x + 2y - 6z = 0$	$x - y - 13 = 0$	$4y + 5z = 0$
7	$3x + y - 6z + 3 = 0$	$x + y - z = 0$	$2y - 3z + 24 = 0$	$2x - 3y = 0$
8	$x - y - 2z - 8 = 0$	$3x + y - 5z = 0$	$2x - y - 3 = 0$	$4y - 7z = 0$
9	$x - y + 4z + 2 = 0$	$3x + 2y - 6z = 0$	$y + 3z + 6 = 0$	$x - 7y = 0$
10	$x - 2y + 3z + 6 = 0$	$3x + 2y - 4z = 0$	$3x + 3z - 1 = 0$	$5x + 6y = 0$
11	$3x + 2y - 6z + 6 = 0$	$2x - y + z = 0$	$2y - z + 4 = 0$	$3x - 2y = 0$
12	$2x - y + z - 3 = 0$	$3x - y + 2z = 0$	$3x + z - 4 = 0$	$x - 2y = 0$
13	$x + 2y - z - 5 = 0$	$2x + 3y + z = 0$	$3x - 2y - 6 = 0$	$3y - 2z = 0$
14	$x + 2y - 2z - 2 = 0$	$6x - 3y + 2z = 0$	$5x + 2z + 10 = 0$	$3x - 3y = 0$
15	$2x - y + 3z - 1 = 0$	$x + 3y + 2z = 0$	$y + 3z - 12 = 0$	$3x + 2y = 0$
16	$2x + y - 4z + 4 = 0$	$4x - y - 2z = 0$	$2x + y + 1 = 0$	$x + 4z = 0$
17	$3x + 2y - 3z + 6 = 0$	$x + y - 2z = 0$	$2x + 3y + 6 = 0$	$2x + 4y = 0$
18	$4x + y - 2z + 2 = 0$	$2x - y + 2z = 0$	$2y - 2z + 4 = 0$	$4y + 2z = 0$
19	$x + y + 3z + 3 = 0$	$3x - 6y + z = 0$	$2x - 3z + 6 = 0$	$2x - 3y = 0$
20	$x - 4y - 2z - 8 = 0$	$2x + y - z = 0$	$5x + z + 10 = 0$	$3y - z = 0$
21	$3x + y + 3z + 6 = 0$	$4x + y - 3z = 0$	$4y + z + 2 = 0$	$2x - 3z = 0$
22	$5x - y + z + 5 = 0$	$x + 2y + 3z = 0$	$3x - 2y - 6 = 0$	$3y + 2z = 0$
23	$x - 2y + 3z + 6 = 0$	$12x + y + z = 0$	$2y - z + 4 = 0$	$x + 7z = 0$
24	$3x + y + 3z + 1 = 0$	$2x + 2y - z = 0$	$2y + 4z - 3 = 0$	$7x - 4y = 0$
25	$x - 2y - 4z + 4 = 0$	$2x + y - 4z = 0$	$2x + 3y + 3 = 0$	$3y + 4z = 0$
26	$2x - 3y + 6z - 12 = 0$	$3x + 2y - z = 0$	$3y - 4z - 12 = 0$	$2x + y = 0$
27	$4x + y - z + 2 = 0$	$2x - y + 2z = 0$	$2y - z - 1 = 0$	$3x + 7y = 0$
28	$x + 3y - 6z - 9 = 0$	$3x - 6y + 2z = 0$	$2x + z - 4 = 0$	$4y - 3z = 0$
29	$2x - 2y + z - 6 = 0$	$2x - y + 2z = 0$	$2x - 3z + 12 = 0$	$2y + z = 0$
30	$x - 2y + 3z + 12 = 0$	$2x + y + 4z = 0$	$2y - z + 4 = 0$	$6x + y = 0$

Задание 20. Написать уравнение плоскости проходящей через точку A перпендикулярно вектору BC .

Вариант	Точка A			Точка B			Точка C		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	1	0	-2	2	-1	3	0	-3	2
2	-1	3	4	-1	5	0	2	6	1
3	4	-2	0	1	-1	-5	-2	1	-3
4	-8	0	7	-3	2	4	-1	4	5
5	7	-5	1	5	-1	-3	3	0	-4
6	-3	5	-2	-4	0	3	-3	2	5
7	1	-1	8	-4	-3	10	-1	-1	7
8	-2	0	-5	2	7	-3	1	10	-1
9	1	9	-4	5	7	1	3	5	0
10	-7	0	3	1	-5	-4	2	-3	0
11	0	-3	5	-7	2	6	-3	2	4
12	5	-1	2	2	-4	3	4	-1	3

13	-3	7	2	3	5	1	4	5	3
14	0	-2	8	4	3	2	1	4	3
15	1	-1	5	0	7	8	-1	3	8
16	-4	0	9	12	4	11	8	5	15
17	3	-3	6	1	9	-5	6	6	-4
18	2	1	7	9	0	2	9	2	3
19	-7	1	-4	8	11	-3	9	9	-1
20	1	0	-6	-7	2	1	-9	6	1
21	-3	1	0	6	3	3	9	4	-2
22	-4	-2	5	3	-3	-7	9	3	-7
23	0	-8	10	-5	5	7	-8	0	4
24	1	-5	-2	6	-2	1	2	-2	-2
25	0	7	-9	-1	8	-11	-4	3	-12
26	-3	-1	7	0	2	-6	2	3	-5
27	5	3	-1	0	0	-3	5	-1	0
28	-1	2	-2	13	14	1	14	15	2
29	7	-5	0	8	3	-1	8	5	1
30	-3	6	4	8	-3	5	10	-3	7

Задание 21. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3 .

Вариант	Точка M_1			Точка M_2			Точка M_3			Точка M_0		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	-3	4	-7	1	5	-4	-5	-2	0	-12	7	-1
2	-1	2	-3	4	-1	0	2	1	-2	1	-6	-5
3	-3	-1	1	-9	1	-2	3	-5	4	-7	0	-1
4	1	-1	1	-2	0	3	2	1	-1	-2	4	2
5	1	2	0	1	-1	2	0	1	-1	2	-1	4
6	1	0	2	1	2	-1	2	-2	1	-5	-9	1
7	1	2	-3	1	0	1	-2	-1	6	3	-2	-9
8	3	10	-1	2	3	-5	-6	0	-3	-6	7	-10
9	-1	2	4	-1	-2	-4	3	0	-1	-2	3	5
10	0	-3	1	-4	1	2	2	-1	5	-3	4	-5
11	1	3	0	4	-1	2	3	0	1	4	3	0
12	-2	-1	-1	0	3	2	3	1	-4	-21	20	-16
13	-3	-5	6	2	1	-4	0	-3	-1	3	6	68
14	2	-4	-3	5	-6	0	-1	3	-3	2	-10	8
15	1	-1	2	2	1	2	1	1	4	-3	2	7
16	1	3	6	2	2	1	-1	0	1	5	-4	5
17	-4	2	6	2	-3	0	-10	5	8	-12	1	8
18	7	2	4	7	-1	-2	-5	-2	-1	10	1	8
19	2	1	4	3	5	-2	-7	-3	2	-3	1	8
20	-1	-5	2	-6	0	-3	3	6	-3	10	-8	-7
21	0	-1	-1	-2	3	5	1	-5	-9	-4	-13	6
22	5	2	0	2	5	0	1	2	4	-3	-6	-8
23	2	-1	-2	1	2	1	5	0	-6	14	-3	7
24	-2	0	-4	-1	7	1	4	-8	-4	-6	5	5

25	14	4	5	-5	-3	2	-2	-6	-3	-1	-8	7
26	1	2	0	3	0	-3	5	2	6	-13	-8	16
27	2	-1	2	1	2	-1	3	2	1	-5	3	7
28	1	1	2	-1	1	3	2	-2	4	2	3	8
29	2	3	7	4	1	-2	6	3	7	-5	-4	8
30	1	1	-1	2	3	1	3	2	1	-3	-7	6

Задание 22. Найти угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Вариант	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
1	1	-3	0	5	2	-1	5	-16
2	1	-3	1	-1	1	0	1	-1
3	4	-5	3	-1	1	-4	-1	9
4	3	-1	2	15	5	9	-3	-1
5	6	2	-4	17	9	3	-6	-4
6	1	$-\sqrt{2}$	1	-1	1	$\sqrt{2}$	-1	3
7	0	3	-1	0	0	2	1	0
8	6	3	-2	0	1	2	6	-12
9	1	2	2	-3	16	12	-15	-1
10	2	-1	5	16	1	2	3	8
11	2	2	1	-1	1	0	1	-1
12	3	1	1	-4	0	1	1	5
13	3	-2	-2	-16	1	1	-3	-7
14	2	2	1	9	1	-1	3	-1
15	1	2	2	-3	1	-1	2	5
16	3	2	-3	-1	1	1	1	-7
17	1	-3	-2	-8	1	1	-1	3
18	3	-2	3	23	0	1	1	5
19	1	1	3	-7	0	1	1	-1
20	1	-2	2	17	1	-2	0	-1
21	1	2	0	-1	1	1	0	6
22	2	0	-1	5	2	3	0	-7
23	5	3	1	-18	0	2	1	-9
24	4	0	3	-2	1	2	2	5
25	1	4	-1	1	2	1	4	-3
26	0	2	1	-9	1	-1	2	-1
27	2	-6	14	-1	5	-15	35	-3
28	1	-1	7	-1	2	-2	0	-5
29	3	-1	0	-5	2	1	0	-3
30	1	1	$\sqrt{2}$	-3	1	-1	$\sqrt{2}$	-1

Задание 23. Найти расстояние между прямой, проходящей через точки A и B , и прямой, проходящей через точки C и D .

Вариант	Точка A			Точка B			Точка C			Точка D		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z

1	4	1	5	6	2	4	2	-4	6	3	-1	14
2	4	1	3	8	2	1	1	-4	5	3	-3	12
3	3	3	1	8	4	-1	-2	-1	3	0	1	11
4	3	1	2	8	5	-1	-1	-2	5	2	-1	12
5	3	2	1	9	4	-2	-3	-4	4	0	-1	11
6	4	5	4	9	7	2	0	-2	6	2	1	15
7	1	5	2	5	7	-1	-4	-1	5	-1	2	12
8	2	4	2	8	8	-1	-2	-1	5	1	2	12
9	4	5	2	7	9	1	0	0	3	1	3	11
10	4	2	4	8	4	1	-2	-1	7	1	1	14
11	4	3	1	10	5	-2	-1	1	4	2	2	11
12	2	3	5	4	5	4	0	-3	6	1	0	15
13	3	1	4	8	5	2	-2	-2	6	0	-1	15
14	3	2	5	8	3	3	-1	-2	7	1	1	16
15	2	2	5	7	3	2	-3	0	8	0	1	16
16	3	1	2	8	5	-1	-1	-2	5	2	-1	12
17	2	1	2	6	4	-1	-2	-6	5	1	-3	12
18	4	3	3	6	7	2	1	-1	4	2	2	14
19	1	3	4	6	6	1	-4	1	7	-1	2	13
20	5	2	4	9	5	2	0	-4	6	2	-2	14
21	4	1	5	8	3	4	1	-5	6	2	-3	15
22	5	2	1	9	3	0	3	-5	2	4	-2	11
23	3	4	4	9	6	1	-2	2	7	1	3	13
24	4	2	5	8	6	2	0	-1	8	3	0	15
25	1	1	4	6	5	1	-5	-3	7	-2	-1	14
26	2	2	1	5	3	-1	-2	-4	3	0	-1	10
27	2	4	3	6	5	0	-3	1	6	0	3	12
28	2	5	1	6	7	-2	-2	1	4	1	4	12
29	1	2	1	7	3	-2	-4	-3	4	-1	-1	10
30	4	3	2	8	6	-1	0	-2	5	3	-1	12

Задание 24. Написать каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Вариант	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
1	2	1	1	-2	2	-1	-3	6
2	1	-3	2	2	1	3	1	14
3	1	-2	1	-4	2	2	-1	-8
4	1	1	1	-2	1	-1	-2	2
5	2	3	1	6	1	-3	-2	3
6	3	1	-1	-6	3	-1	2	0
7	1	5	2	11	1	-1	-1	-1
8	3	4	-2	1	2	-4	3	4
9	5	1	-3	4	1	-1	2	2

10	1	-1	-1	-2	1	-2	1	4
11	4	1	-3	2	2	-1	1	-8
12	3	3	-2	-1	2	-3	1	6
13	6	-7	-4	-2	1	7	-1	-5
14	8	-1	-3	-1	1	1	1	10
15	6	-5	-4	8	6	5	3	4
16	1	5	-1	-5	2	-5	2	5
17	2	-3	1	6	1	-3	-2	3
18	5	1	2	4	1	-1	-3	2
19	4	1	1	2	2	-1	-3	-8
20	2	1	-3	-2	2	-1	1	6
21	1	1	-2	-2	1	-1	1	2
22	1	5	-1	1	1	-1	2	-1
23	1	-1	1	-2	1	-2	-1	4
24	6	-7	-1	-2	1	7	-4	-5
25	1	5	2	-5	2	-5	-1	5
26	1	-3	1	2	1	3	2	14
27	2	3	-2	6	1	-3	1	3
28	3	4	3	1	2	-4	-2	4
29	3	3	1	-1	2	-3	-2	6
30	6	-5	3	8	6	5	-4	4

Задание 25. Найти координаты точки A , равноудаленной от точек B и C .

Вариант	Точка A			Точка B			Точка C		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	0	0	z	5	1	0	0	2	3
2	0	0	z	3	3	1	4	1	2
3	0	0	z	3	1	3	1	4	2
4	0	0	z	-1	-1	-6	2	3	5
5	0	0	z	-13	4	6	10	-9	5
6	0	0	z	-5	-5	6	-7	6	2
7	0	0	z	-18	1	0	15	-10	2
8	0	0	z	10	0	-2	9	-2	1
9	0	0	z	-6	7	5	8	-4	3
10	0	0	z	6	-7	1	-1	2	5
11	0	0	z	7	0	-15	2	10	-12
12	0	y	0	3	0	3	0	2	4
13	0	y	0	1	6	4	5	7	1
14	0	y	0	-2	8	10	6	11	-2
15	0	y	0	-2	-4	6	7	2	5
16	0	y	0	2	2	4	0	4	2
17	0	y	0	0	-4	1	1	-3	5
18	0	y	0	0	5	-9	-1	0	5
19	0	y	0	-2	4	-6	8	5	1
20	0	y	0	7	3	-4	1	5	7
21	0	y	0	0	-2	4	-4	0	4

22	x	0	0	0	1	3	2	0	4
23	x	0	0	4	0	5	5	4	2
24	x	0	0	8	1	-7	10	-2	1
25	x	0	0	3	5	6	1	2	3
26	x	0	0	4	5	-2	2	3	4
27	x	0	0	-2	0	6	0	-2	-4
28	x	0	0	1	5	9	3	7	11
29	x	0	0	4	6	8	2	4	6
30	x	0	0	1	2	3	2	6	10

Задание 26. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Вариант	x_0	y_0	z_0	m	n	p	A	B	C	D
1	2	3	-1	-1	-1	4	1	2	3	-14
2	-1	3	-1	3	-4	5	1	2	-5	20
3	1	-5	1	-1	4	2	1	-3	7	-24
4	1	0	-3	1	0	2	2	-1	4	0
5	5	3	2	1	-1	0	3	1	-5	-12
6	-1	-2	3	-3	2	-2	1	3	-5	9
7	1	2	-1	-2	1	-1	1	-2	5	17
8	1	2	4	2	0	1	1	-2	4	-19
9	-2	1	-4	-1	1	-1	2	-1	3	23
10	-2	2	-3	1	0	0	2	-3	-5	-7
11	1	1	-2	2	-1	3	4	2	-1	-11
12	1	-1	1	1	0	-1	3	-2	-4	-8
13	-2	1	-3	-1	1	2	1	2	-1	-2
14	-3	2	-2	1	-5	3	5	-1	4	3
15	2	2	4	2	-1	3	1	3	5	-42
16	3	4	4	-1	5	2	7	1	4	-47
17	-3	1	1	2	3	5	2	3	7	-52
18	3	-1	-3	2	3	2	3	4	7	-16
19	5	2	-4	-2	0	-1	2	-5	4	24
20	1	8	-5	8	-5	12	1	-2	-3	18
21	3	1	-5	1	-1	0	1	7	3	11
22	5	-3	1	-1	5	2	3	7	-5	-11
23	1	2	6	7	1	-1	4	1	-6	-5
24	3	-2	8	1	-1	0	5	9	4	-25
25	-1	0	-1	-2	0	3	1	4	13	-23
26	1	3	-5	6	1	3	3	-2	5	-3
27	2	1	-3	4	-3	-2	3	-1	4	0
28	1	-2	3	2	-5	-2	1	2	-5	16
29	1	3	-2	1	0	-2	3	-7	-2	7
30	-3	2	-5	0	-3	11	5	7	9	-32

Задание 27. Найти точку M' симметричную точке M относительно прямой

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ (для вариантов 1–15) или плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$
(для вариантов 16–30).

Вариант	Точка M			x_0	y_0	z_0	m	n	p
	x	y	z						
1	0	–3	–2	1	–1, 5	0	1	–1	1
2	2	–1	1	4, 5	–3	2	1	–0, 5	1
3	1	1	1	2	–1, 5	1	1	–2	1
4	1	2	3	0, 5	–1, 5	1, 5	0	–1	1
5	1	0	–1	3, 5	1, 5	0	2	2	0
6	2	1	0	2	–1, 5	–0, 5	0	–1	1
7	–2	–3	0	–0, 5	–1, 5	0, 5	1	0	1
8	–1	0	–1	0	1, 5	2	–1	0	1
9	0	2	1	1, 5	0	2	2	–1	1
10	3	–3	–1	6	3, 5	–0, 5	5	4	0
11	3	3	3	1	1, 5	3	–1	0	1
12	–1	2	0	–0, 5	–0, 7	2	1	–0, 2	2
13	2	–2	–3	1	–0, 5	–1, 5	–1	0	0
14	–1	0	1	–0, 5	1	4	0	0	2
15	0	–3	–2	0, 5	–1, 5	1, 5	1	–1	1

Вариант	Точка M			A	B	C	D
	x	y	z				
16	1	0	1	4	6	4	–25
17	–1	0	–1	2	6	–2	11
18	0	2	1	2	4	0	–3
19	2	0	1	0	1	1	2
20	–1	2	0	4	–5	–1	–7
21	2	–1	1	1	–1	2	–2
22	1	1	1	1	4	3	5
23	1	2	3	2	10	10	–1
24	0	–3	–2	2	10	10	–1
25	1	0	–1	0	2	4	–1
26	3	–3	–1	2	–4	–4	–13
27	–2	–3	0	1	5	0	4
28	2	–2	–3	0	1	1	2
29	–1	0	1	2	4	0	–3
30	3	3	3	8	6	8	–25

Задание 28. Даны четыре точки: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$. Составить уравнения:

- плоскости $A_1 A_2 A_3$;
- прямой $A_1 A_2$;
- прямой $A_4 M$, перпендикулярной к плоскости $A_1 A_2 A_3$;
- расстояние от A_4 до плоскости $A_1 A_2 A_3$;
- прямой $A_3 N$, параллельной прямой $A_1 A_2$;
- плоскости, проходящей через A_4 перпендикулярно к прямой $A_1 A_2$.

Вычислить:

- синус угла между прямой $A_1 A_4$ и плоскости $A_1 A_2 A_3$;
- косинус угла между плоскостью Oxy и плоскостью $A_1 A_2 A_3$.

Вариант	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	3	1	4	-1	6	1	-1	1	6	0	4	-1
2	3	1	-2	-1	0	1	1	7	3	8	5	8
3	3	5	4	5	8	3	1	2	-2	-1	0	2
4	2	4	3	1	1	5	4	9	3	3	6	7
5	9	5	5	-3	7	1	5	7	8	6	9	2
6	0	7	1	2	-1	5	1	6	3	3	-9	8
7	5	5	4	1	-1	4	3	5	1	5	8	-1
8	6	1	1	4	6	6	4	2	0	1	2	6
9	7	5	3	9	4	4	4	5	7	7	9	6
10	6	8	2	5	4	7	2	4	7	7	3	7
11	4	2	5	0	7	1	0	2	7	1	5	0
12	4	4	10	7	10	2	2	8	4	9	6	9
13	4	6	5	6	9	4	2	10	10	7	5	9
14	3	5	4	8	7	4	5	10	4	7	7	8
15	10	9	6	2	8	2	9	8	9	7	10	3
16	1	8	2	5	2	6	5	7	4	4	10	9
17	6	6	5	4	9	5	4	6	11	6	9	3
18	7	2	2	-5	7	-7	5	-3	1	2	3	7
19	8	-6	4	10	5	-5	5	6	-8	8	10	7
20	1	-1	3	6	5	8	3	5	8	8	4	1
21	1	-2	7	4	2	10	2	3	5	5	3	7
22	4	2	10	1	2	0	3	5	7	2	-3	5
23	2	3	5	5	3	-7	1	2	7	4	2	0
24	5	3	7	-2	3	5	4	2	10	1	2	7

25	4	3	5	1	9	7	0	2	0	5	3	10
26	3	2	5	4	0	6	2	6	5	6	4	-1
27	2	1	6	1	4	9	2	-5	8	5	4	2
28	2	1	7	3	3	6	2	-3	9	1	2	5
29	2	-1	7	6	3	1	3	2	8	2	-3	7
30	0	4	5	3	-2	1	4	5	6	3	3	2

Задание 29. Решить задачу.

Вариант	Условие
1	Найти точку, симметричную точке $M(6; 10; -7)$ относительно плоскости $2x + 5y - 4z + 2 = 0$.
2	Определить, при каком a прямая $\begin{cases} x + y + az = 1, \\ 2x - y + 3z = 3, \end{cases}$ параллельна плоскости $x + y - 2z = 8$.
3	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(4; 7; -8)$ перпендикулярно плоскости $2x - 5y + z - 13 = 0$.
4	Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-1}{1}$ и через точку $A(3; 3; 3)$.
5	Даны две смежные вершины параллелограмма $A(1; 2; 3)$ и $B(3; 1; 5)$ и его центр $O(4; 0; -1)$. Составить уравнения его сторон.
6	Найти проекцию точки $M(2; 1; 0)$ на плоскость $x + 3y - z = 27$.
7	Две грани куба лежат на плоскостях $3x + 3y + 6z - 1 = 0$ и $2x + 2y + 4z - 1 = 0$. Вычислить объем куба.
8	Составить уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ y + 3z = 3 \end{cases}$ и проходящей через точку $M(0; 2; 2)$.
9	Составить уравнение плоскости, проходящей через векторы $\vec{a}_1 = (3; 1; 0)$; $\vec{a}_2 = (-1; -4; 1)$ и точку $A(0; 1; -2)$.
10	Определить, при каком k прямая $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 4y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ перпендикулярна прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{k} = \frac{z-1}{-1}$.
11	Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0, \\ 2x + 3y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$ с плоскостью, которая проходит через точку $P(0; 1; -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (1; 7; 3)$.
12	Найти расстояние от точки $P(2; -2; 3)$ до плоскости, которая от координатных осей отсекает отрезки равные 3, 4, 5.

13	Будет ли плоскость $4x - 3y + 8 = 0$ параллельна плоскости, проходящей через точки $M_1 (2; 0; 0)$, $M_2 (-1; 0; 3)$, $M_3 (0; 4; -5)$?
14	Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ и точку $M (2; 1; 2)$.
15	Вычислить расстояние между плоскостями $2x - y + 2z + 9 = 0$ и $4x - 2y + 4z - 21 = 0$.
16	Через точки $A_1 (-6; 6; -5)$ и $A_2 (12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.
17	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1 (3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$; $\vec{a}_2 = (1; -2; 1)$.
18	Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.
19	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P (5; -2; 1)$ и пересекающей ось OY под прямым углом.
20	Найти точку, симметричную точке $M_1 (2; 4; -6)$ относительно плоскости $x - 3y + 5z = 0$.
21	Дан параллелограмм с центром в точке $K (5; 2; -2)$. Две его смежные вершины находятся в точках $A (1; 3; -1)$ и $B (0; 4; -5)$. Составить уравнения всех сторон параллелограмма.
22	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M (2; 3; -3)$ и перпендикулярной векторам $\vec{a}_1 = 2i + 3j + k$; $\vec{a}_2 = i - j + 4k$.
23	При каком β плоскость $\beta x + 4y + 3z = 5$ параллельна прямой $\begin{cases} 2x - y - z = 1, \\ x + 4y + 3z = 3. \end{cases}$
24	При каком t плоскость $2x + ty - 10z - 7 = 0$ будет перпендикулярна другой плоскости, которая отсекает от координатных осей соответственно отрезки $a = 4$; $b = -1$; $c = 5$?
25	Найти расстояние от точки $P (1; -2; -3)$ до плоскости, проходящей через точки $P_1 (0; 4; -1)$, $P_2 (1; 3; 2)$ и вектор $\vec{a} = (3; 7; -2)$.
26	Записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной другой плоскости, которая проходит через точку $M (4; 1; 0)$ и прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{4}$.
27	Прямая проходит через точки $P_1 (2; 7; -5)$ и $P_2 (0; 3; -1)$. Найти точку, в которой эта прямая пересекает плоскость, проходящую через точку $P (2; 3; 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (1; 1; 1)$.
28	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M (1; 1; -1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} 2x + z - 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$
29	Записать уравнение плоскости, на которой лежат точки $A_1 (2; 1; -2)$,

	$A_2 (5; 6; -3), A_3 (1; 1; 4)$. Будет ли эта плоскость перпендикулярна прямой $\frac{x+4}{15} = \frac{2(y-2)}{-17} = \frac{2(z-1)}{5}$.
30	Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $M (2; 4; 1)$, на плоскости $2x + 3y - 4z + 5 = 0$.

Задание 30. Решить задачу.

Вариант	Условие
1	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -3; 5)$ параллельно плоскости Oxy .
2	Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A (3; 2; -5)$.
3	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 4; 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.
4	Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -4; 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz .
5	Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору \overline{AB} , если $A (5; -2; 3)$, $B (1; -3; 5)$.
6	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; -4)$ параллельно двум векторам $\overline{a} (4; 1; -1)$ и $\overline{b} (2; -1; 2)$.
7	Найти проекцию точки $M (4; -3; 1)$ на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$.
8	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A (3; -1; 2)$, $B (2; 1; 4)$ параллельно вектору $\overline{a} (5; -2; -1)$.
9	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A (2; 3; -1)$, $B (1; 1; 4)$ перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$.
10	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ и прямую $x = t - 3; y = 2t + 5; z = -3t + 1$.
11	Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M (-2; 7; 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.
12	Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$.
13	Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M (2; -3; 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.
14	Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и

	$2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.
15	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2 , если $M_1(2; 3; -4)$ и $M_2(-1; 2; -3)$.
16	Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2; 5; -1)$.
17	Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны.
18	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 2; 3)$ и $N(-3; 4; -5)$ параллельно оси Oz .
19	Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.
20	Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6; -10; 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz отрезок $c = 2$.
21	При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{n} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?
22	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 0)$, $B(-2; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$.
23	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; 3; -5)$ и $N(-1; 1; -6)$ параллельно вектору $a = (4; 4; 3)$.
24	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 4)$ параллельно вектору $\bar{a}(5; -2; -1)$.
25	Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1; 5; 6)$ и $M_2(-1; 7; 10)$.
26	Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -3; -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.
27	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 5; -1)$ и $B(-3; 1; 3)$ параллельно оси Oy .
28	Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3; -5; 2)$.
29	Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$.
30	Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0,5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

Задание 31. Решить задачу.

Вариант	Условие
1	При каком значении параметра n прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$
2	Найти точку пересечения прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$ и плоскости $x-2y+z-15=0$.
3	Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.
4	При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?
5	При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?
6	Даны вершины треугольника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A .
7	Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ и плоскости $x-2y+z-15=0$.
8	Найти точку Q , симметричную точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5; 4; 6)$ и $M_2(-2; -17; -8)$.
9	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(2; 3; -1)$ и образующую с осями координат углы, соответственно равные 60° , 45° и 120° .
10	Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.
11	Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+4}{-2}$ и $\frac{x-21}{6} = \frac{y-21}{-4} = \frac{z-2}{-1}$.
12	При каких значениях t и C прямая $\frac{x-2}{t} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?
13	Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ и плоскости $x+2y-2z+6=0$.

14	Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до прямой $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 2x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$
15	Найти точку Q , симметричную точке $P(3; -4; -6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ и $M_3(10; -7; 1)$.
16	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -3; 3)$ и образующую с осями координат углы, соответственно равные 60° , 45° , 120° .
17	Найти уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(4x + 13y - 2z - 60) + \beta(4x + 3y + 3z - 30) = 0$ и отсекает от координатного угла Oxy треугольник с площадью, равной 6 кв. ед.
18	Найти точку Q , симметричную точке $P(-3; 2; 5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$
19	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$
20	Убедившись, что прямые $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \text{ и } \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \text{ параллельны, вычислить расстояние } d \text{ между ними.}$
21	Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ и отсекает на осях абсцисс и аппликат отличные от нуля отрезки одинаковой длины.
22	Составить уравнения проекции прямой $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$.
23	Найти точку Q , симметричную точке $P(4; 1; 6)$ относительно прямой $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$
24	Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 1; -4)$, $C(0; 2; 3)$, проведенной из вершины C .
25	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2; -5; 3)$ параллельно плоскости OXZ .
26	Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$.

27	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.
28	Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.
29	Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.
30	Даны вершины треугольника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .

Задание 32. Построить поверхности и определить их вид (название).

Вариант	Задание 1	Задание 2
1	$4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$	$x^2 + 4z = 0$
2	$3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$	$x^2 + 2y^2 - 2z = 0$
3	$-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$	$5x^2 - y^2 - 4z^2 = 0$
4	$4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$	$x^2 - y = -9z^2$
5	$7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$	$x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$
6	$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 72 = 0$	$x^2 + 4y^2 + z = 8$
7	$4x^2 + 6y^2 - 24z^2 - 96 = 0$	$20x^2 - y^2 - 8z^2 = 0$
8	$4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$	$y = 5x^2 + 3z^2$
9	$2x^2 + 3y^2 - z^2 - 18 = 0$	$x^2 = 8(y^2 + z^2)$
10	$-5x^2 - 3y^2 + 4z^2 + 60 = 0$	$5z^2 + 2y^2 = 10x$
11	$x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$	$2y = x^2 + 4z^2$
12	$6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$	$x = 8y^2 + 2z^2$
13	$-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$	$6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$
14	$5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$	$x^2 + 3z^2 = 0$
15	$6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$	$3x^2 + y^2 - 3z = 0$
16	$-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$	$6x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$
17	$-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$	$x^2 - 2y + z^2 = 0$
18	$4x^2 - y^2 - 3z^2 - 12 = 0$	$4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$
19	$3x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 48 = 0$	$z = 4 - x^2 - y^2$
20	$4x^2 + 5y^2 - 10z^2 - 60 = 0$	$14x^2 - 7y^2 - z^2 = 0$

21	$9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$	$15y = 10x^2 + 6z^2$
22	$2x^2 + 3y^2 - z^2 - 36 = 0$	$x^2 = 5(y^2 + z^2)$
23	$3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$	$4x^2 + 3y^2 - 12z = 0$
24	$8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$	$3x^2 - y - 4z^2 = 0$
25	$x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$	$x - 9y^2 - 3z^2 = 0$
26	$2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$	$2x^2 + 3z = 0$
27	$7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$	$2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$
28	$-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$	$3x = 2y^2 + 6z^2$
29	$3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$	$-4x^2 = z^2 - 2y$
30	$3x^2 - 7y^2 - 2z^2 - 42 = 0$	$27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$

Задание 33. Определить вид и параметры поверхности второго порядка.

Вариант	Задание
1	$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 9y - 12z - 7 = 0$
2	$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 12y - 16z - 1 = 0$
3	$3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0$
4	$2x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 8x - 6y - 12z - 1 = 0$
5	$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 8x + 36y - 72z + 40 = 0$
6	$x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6x + 4y + 32z - 40 = 0$
7	$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 12y - 8z - 23 = 0$
8	$2x^2 + 4y^2 - z^2 + 2x - 4y - 8z - 3 = 0$
9	$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4x + 4y - 6z - 1 = 0$
10	$x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x + 12y - 4z - 3 = 0$
11	$2x^2 + y^2 - 2z^2 + 16x - 2y + 4z + 17 = 0$
12	$3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y - 24z + 136 = 0$
13	$6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 24x - 6y - 4z + 25 = 0$
14	$2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 42 = 0$
15	$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4x + 4y - 8z + 100 = 0$
16	$x^2 + 2y^2 + 6x - 18y + 8z + 49 = 0$
17	$x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2x - 4y - 24z - 34 = 0$
18	$3x^2 - 4y^2 + 6z^2 - 18x - 8y + 12z + 29 = 0$
19	$-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4x + 12y + 8z + 22 = 0$
20	$2x^2 + 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 47 = 0$

21	$x^2 - 2y^2 + 6x + 4y - 8z + 47 = 0$
22	$3x^2 + 2z^2 + 6x + 4y - 8z - 1 = 0$
23	$-4x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 12x - 6y + 8z - 1 = 0$
24	$-2y^2 + z^2 - 8x - 4y - 2z + 23 = 0$
25	$2y^2 + z^2 - 8x - 4y + 2z - 13 = 0$
26	$3x^2 - 4y^2 - 6z^2 - 18x - 18y - 12z + 17 = 0$
27	$y^2 - 2z^2 + 2y + 4z - 5 = 0$
28	$x^2 + 4x - 3z + 13 = 0$
29	$2y^2 + z^2 - 4y + 2z - 1 = 0$
30	$x^2 - 8x + 7 = 0$

Задание 34. Изобразить тело, ограниченное данными поверхностями. Указать тип поверхностей, ограничивающих тело.

Вариант	Задание
1	$z = x^2 + y^2 - 4; \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
2	$x^2 + y^2 = 4; \quad z = 2 - y; \quad z = 0$
3	$y = x^2 + z^2 - 4; \quad y = 0$
4	$x^2 + y^2 = 4; \quad z = 8 - x^2 - y^2; \quad z = 0$
5	$z = x^2 + y^2 - 8; \quad z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$
6	$x^2 + z^2 = 4; \quad y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}; \quad y = -4$
7	$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad z = x^2 + y^2 - 4; \quad y = 0 (y \leq 0)$
8	$y = 2\sqrt{x^2 + z^2}; \quad y = -4 - \sqrt{4 - x^2 - z^2}$
9	$x^2 + y^2 = 4; \quad z = 2 + y; \quad z = 0$
10	$x^2 + z^2 = 1; \quad z = 1 - y; \quad y = 0$
11	$z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = 0$
12	$x^2 + y^2 = 4; \quad z = 4 + y; \quad z = 0$
13	$x^2 + z^2 = 4; \quad z = 6 - y; \quad y = 0$
14	$z = x^2 + y^2 - 4; \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
15	$y = x^2 + z^2 - 1; \quad y = 0$
16	$z = x^2 + y^2 - 1; \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
17	$y = x^2 + z^2 - 1; \quad y = 0$
18	$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad z = -2\sqrt{x^2 + y^2} + 4$

19	$x^2 + z^2 = 4; y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}; y = -4$
20	$z = x^2 + y^2; z = -2; z = 4$
21	$y = 2\sqrt{x^2 + z^2}; y = 4$
22	$y^2 = x^2 + z^2; y = -2; y = 4$
23	$x^2 + y^2 + z^2 = 4; y = z (z \leq y)$
24	$x^2 + z^2 = 4; z = 2 - y; z = 0$
25	$x^2 + z^2 = 4 (0 \leq y \leq 4); y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}; y = 4$
26	$z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = 4$
27	$y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}; y = 0$
28	$z = x^2 + y^2; z = 4$
29	$y = x^2 + z^2; y = 4$
30	$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$

Задание 35. Изобразить тело, ограниченное данными поверхностями.

Вариант	Задание 1	Задание 2
1	$y = 3x; y = 0; x = 2; z = xy; z = 0$	$z - 3 = 8x^2 + 8y^2; z = 16x + 3$
2	$y = 4x; y = 0; x = 1; z = \sqrt{xy}; z = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0$
3	$z = 3x^2 + 2y^2;$ $z = 0; x = 1; y = x; y = 0$	$x = 1; y = 3; x + 2y + 4z = 24;$ $x = 0; y = 0; z \geq 0$
4	$y = 3x; y = 0; x = 3; z = xy; z = 0$	$z - 4 = 6x^2 + 6y^2; z = 4x + 1$
5	$4z^2 = x^2 + y^2;$ $z = 0; y = x; y = 8x; x = 2; (z > 0)$	$x + 2y = 4; y = 2; x + y + z = 8;$ $x + 4y = 4; y = 0; z = 0$
6	$y = 4x; y = 0; x = 1; z = xy; z = 0$	$z = 3\sqrt{x^2 + y^2}; x^2 + y^2 = 2 - z$
7	$y^2 + 3z^2 = 6; 3x^2 - 25y^2 = 75;$ $z \geq 0$	$z^2 = 4x^2 + 4y^2; 4x^2 + 4y^2 = 1;$ $z \geq 0; y \geq 0$
8	$y = 2x; y = 0; x = 1; z = \sqrt{xy}; z = 0$	$x^2 + y^2 = 2x; z = 0; z = x$
9	$z = x^2 + 3y^2;$ $z = 0; x = 1; y = x; y = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + z^2 = y^2;$ $x \geq 0; z \geq 0; y \geq 0$
10	$z = 5y; x^2 + y^2 = 16; z = 0$	$z = 4\sqrt{x^2 + y^2}; z = 5 - x^2 - y^2$
11	$y = x; y = 0; x = 2; z = 0$	$z - 1 = 10x^2 + 10y^2; z = 1 - 20y$

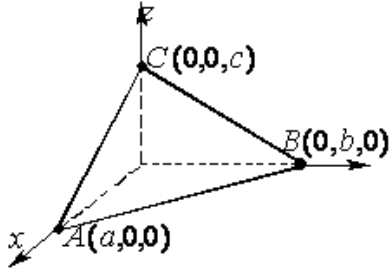
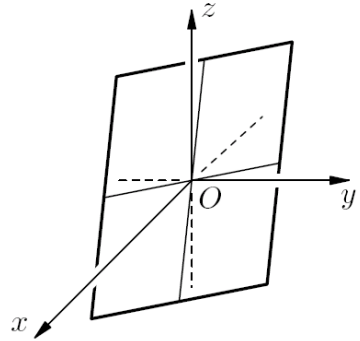
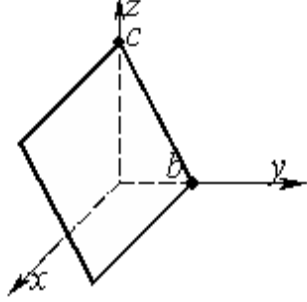
12	$y^2 + 4z^2 = 8; 16x^2 - 49y^2 = 784;$ $z \geq 0$	$x + y = 2; y = \sqrt{x};$ $z = 12y; x = 0; z = 0$
13	$z = x^2 + y^2;$ $z = 0; x = 1; y = 2; x = 0; y = 0$	$z^2 = 4x^2 + 4y^2; x^2 + y^2 = 4;$ $z \geq 0; y \geq 0$
14	$y = 4x; y = 0; x = 4; z = \sqrt{xy}; z = 0$	$x^2 + y^2 = 4y; z = 0; y + z = 5$
15	$z = 2x^2 + 3y^2;$ $z = 0; x = 2; y = 1; x = 0; y = 0$	$2x + 3y = 6; x + 2y + 3z = 6;$ $2x = y; y = 0; z = 0$
16	$z = 2x^2 + y^2;$ $z = 0; x = 2; y = 2x; y = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 = z^2;$ $z \geq 0; y \geq 0$
17	$y = 2x; y = 0; x = 2; z = xy; z = 0$	$z - 2 = 6x^2 + 6y^2; z = 1 - 4y$
18	$4 = x^2 + y^2; z = 0; z = 3y^2$	$y = 16\sqrt{2x}; y = \sqrt{2x}; z = 0; x + z = 2$
19	$y = 5x; y = 0; x = 5; z = \sqrt{xy}; z = 0$	$x^2 + y^2 = 6x; z = 0; z = 2x$
20	$z = x^2 + 5y^2;$ $z = 0; x = 1; y = x; y = 0$	$x = 4; y = 2; x + 2y + 3z = 12;$ $x = 0; y = 0; z \geq 0$
21	$z^2 = 4x^2 + 4y^2;$ $z = 0; y = x; y = 4x; x = 2; (z > 0)$	$z^2 = 8x^2 + 8y^2; x^2 + y^2 = 1;$ $z \geq 0; y \geq 0$
22	$9 = x^2 + y^2; z = 0; z = 3y^2$	$y = \sqrt{x}; x + y = 2; z = 2x; z = 0$
23	$2z = x^2 + y^2;$ $z = 0; x = 2; y = 3; x = 0; y = 0$	$z^2 = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 1;$ $z \geq 0; y \geq 0$
24	$y = 5x; y = 0; x = 3; z = 0$	$x^2 + y^2 \leq 1; x^2 + y^2 + z^2 = 9; x \geq 0$
25	$z = x^2 + y^2;$ $z = 0; y = 3x; x = 2; y = 0$	$z^2 = 4x^2 + 4y^2; x^2 + y^2 = 4;$ $z \geq 0; y \geq 0$
26	$2y^2 + z^2 = 4; 3x^2 - 8y^2 = 48; z \geq 0$	$x^2 + y^2 = 4y; z = 0; y + z = 6$
27	$z^2 = x^2 + y^2;$ $z = 0; y = 2x; y = 4x; x = 3; (z > 0)$	$3x + y = 5; x + y + z = 5;$ $x = 0; y = 0$
28	$y = 2x; y = 0; x = 4; z = \sqrt{xy}; z = 0$	$x^2 + y^2 = 4x; z = 0; z = x$
29	$z = 16x^2 + y^2;$ $z = 0; y = 2x; x = 1; y = 0$	$x + 5y + 10z = 20;$ $x = 1; y = 3; x = 0; y = 0; z \geq 0$
30	$y = x; y = 0; x = 1; z = \sqrt{xy}; z = 0$	$x^2 + y^2 = 8y; z = 0; y + z = 6$

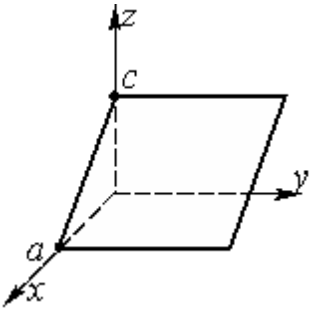
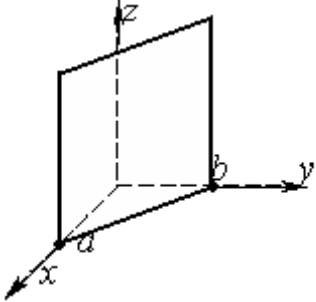
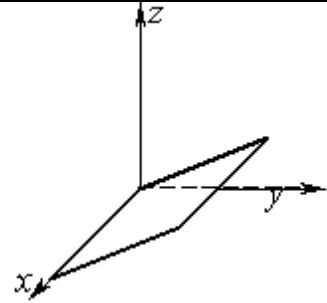
Задание 36. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат.

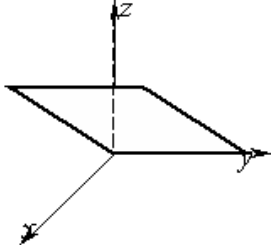
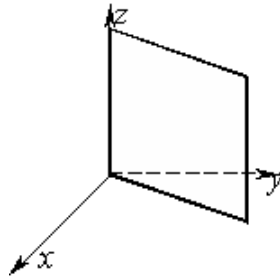
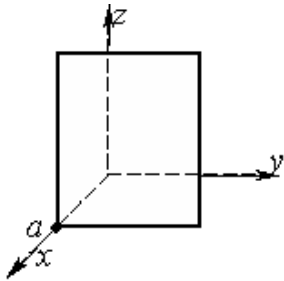
Сделать рисунок.

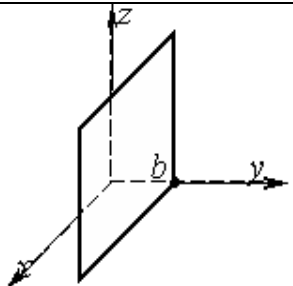
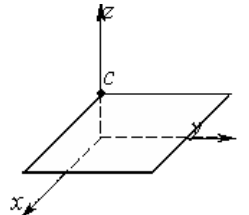
Вариант	Задание 1		Задание 2	
	Уравнение линии	Ось вращения	Уравнение линии	Ось вращения
1	$x^2 - y^2 = 6$	Ox	$y^2 = 3x$	Oy
2	$3x^2 = -4y$	Oy	$4x^2 + 3y^2 = 12$	Ox
3	$3x^2 = -2z$	Oz	$8x^2 + 11z^2 = 88$	Ox
4	$5x^2 - 3z^2 = 15$	Oz	$3z^2 = x$	Ox
5	$2y^2 = 7x$	Ox	$6y^2 + 5z^2 = 30$	Oy
6	$3x^2 - 8y^2 = 288$	Ox	$x = 5; z = -3$	Oy
7	$5z = x^2$	Oz	$3y^2 + 18z^2 = 1$	Oz
8	$15y^2 - x^2 = 6$	Oy	$y = 5; z = 2$	Ox
9	$y^2 = 5z$	Oz	$3x^2 + 7y^2 = 21$	Ox
10	$15x^2 - 3y^2 = 1$	Ox	$x = 3; y = 4$	Oz
11	$x^2 + 2y = 4$	Oz	$x = 3; z = -1$	Oy
12	$x^2 - 9y^2 = 9$	Ox	$3y^2 = z$	Oz
13	$x^2 = -5y$	Oy	$2x^2 + 3z = 6$	Oz
14	$2y^2 - 5z = 10$	Oz	$y = 2; z = 6$	Ox
15	$2x^2 = z$	Oz	$x^2 + 4z^2 = 4$	Ox
16	$7x^2 - 5y^2 = 35$	Ox	$x = -1; y = -3$	Oz
17	$y^2 = -4z$	Oz	$3y^2 + z^2 = 6$	Oy
18	$z^2 = 2y$	Oy	$2x^2 + 3z^2 = 6$	Oz
19	$5x^2 - 6z^2 = 30$	Ox	$x = 3; z = -2$	Oy
20	$x^2 = -4z$	Oz	$y^2 + 4z^2 = 4$	Oy
21	$y^2 - 5x^2 = 5$	Oy	$y = 3; z = 1$	Ox
22	$y^2 = 3z$	Oz	$2x^2 + 3z^2 = 6$	Ox
23	$3x^2 - 5z^2 = 15$	Oz	$z = -1; y = 3$	Ox
24	$x^2 + 3z^2 = 9$	Oz	$x = 4; z = 6$	Oy
25	$2x^2 - 6y^2 = 12$	Ox	$y^2 = 4z$	Oz
26	$x^2 = 3y$	Oy	$3x^2 + 4z^2 = 24$	Oz
27	$3y^2 - 4z^2 = 12$	Oz	$y = 4; z = 2$	Ox
28	$x^2 = -3z$	Oz	$3x^2 + 5z^2 = 15$	Ox
29	$4x^2 - 3y^2 = 12$	Ox	$x = 1; y = 2$	Oz
30	$y^2 = 2z$	Oz	$9y^2 + 4z^2 = 36$	Oy

Неполные уравнения плоскости

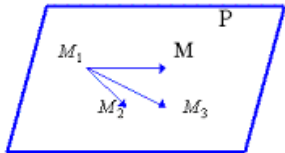
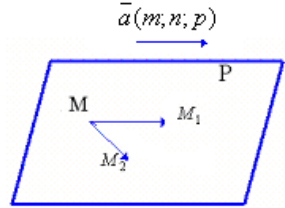
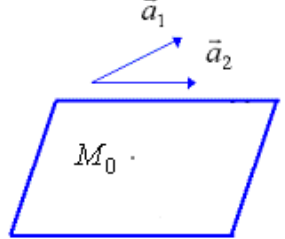
№ п/п	Коэффициенты и свободный член	Вид уравнения	Примечания	Изображение
1	$A, B, C, D \neq 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$	Общее уравнение прямой	
2	$D = 0$ ($A, B, C \neq 0$)	$Ax + By + Cz = 0$	Проходит через начало координат	
3	$A = 0$ ($B, C, D \neq 0$)	$Bx + Cy + D = 0$	Параллельна оси Ox	

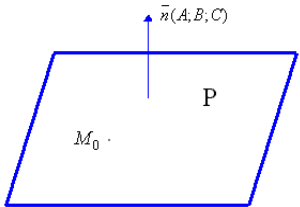
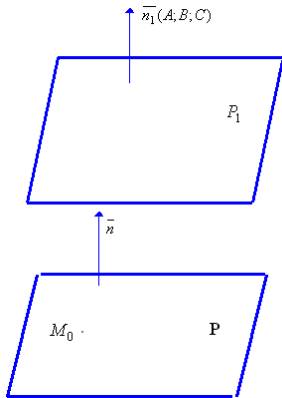
№ п/п	Коэффициенты и свободный член	Вид уравнения	Примечания	Изображение
4	$B = 0$ ($A, C, D \neq 0$)	$Ax + Cz + D = 0$	Параллельна оси Oy	
5	$C = 0$ ($A, B, D \neq 0$)	$Ax + By + D = 0$	Параллельна оси Oz	
6	$A = D = 0$ ($B, C \neq 0$)	$By + Cz = 0$	Проходит через ось Ox	

№ п/п	Коэффициенты и свободный член	Вид уравнения	Примечания	Изображение
7	$B = D = 0$ ($A, C \neq 0$)	$Ax + Cz = 0$	Проходит через ось Oy	
8	$C = D = 0$ ($A, B \neq 0$)	$Ax + By = 0$	Проходит через ось Oz	
9	$B = C = 0$ ($A, D \neq 0$)	$Ax + D = 0$	Параллельна плоскости yOz	

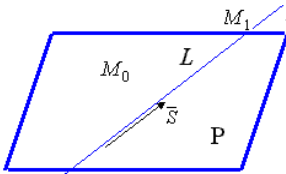
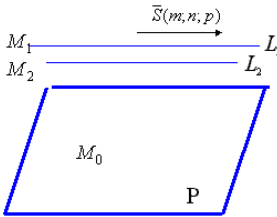
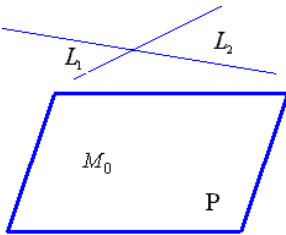
№ п/п	Коэффициенты и свободный член	Вид уравнения	Примечания	Изображение
10	$A = C = 0$ ($B, D \neq 0$)	$By + D = 0$	Параллельна плоскости xOz	
11	$A = B = 0$ ($C, D \neq 0$)	$Cz + D = 0$	Параллельна плоскости xOy	
12	$A = B = D = 0$ ($C \neq 0$)	$z = 0$	Плоскость xOy	—
13	$A = C = D = 0$ ($B \neq 0$)	$y = 0$	Плоскость xOz	—
14	$B = C = D = 0$ ($A \neq 0$)	$x = 0$	Плоскость yOz	—

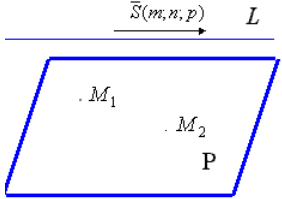
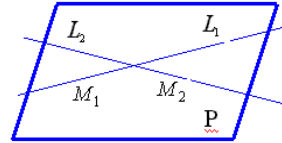
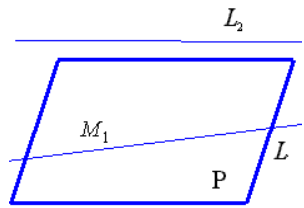
Методы решения задач на плоскости

№ п/п	Исходные данные		Решение	Рисунок
1	Три точки искомой плоскости	$M_1 (x_1; y_1; z_1),$ $M_2 (x_2; y_2; z_2),$ $M_3 (x_3; y_3; z_3),$ $M_1, M_2, M_3 \in P$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	
2	Две точки и вектор, параллельный плоскости	$M_1 (x_1; y_1; z_1),$ $M_2 (x_2; y_2; z_2),$ $M_1, M_2 \in P,$ $\vec{a} (m; n; p),$ $\vec{a} \parallel P,$ $\vec{a} \parallel \overline{M_1 M_2}$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$	
3	Точка и два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости	$M_0 (x_0; y_0; z_0) \in P,$ $\vec{a}_1 (m_1; n_1; p_1),$ $\vec{a}_2 (m_2; n_2; p_2),$ $\vec{a}_1 \parallel P; \vec{a}_2 \parallel P,$ $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$	

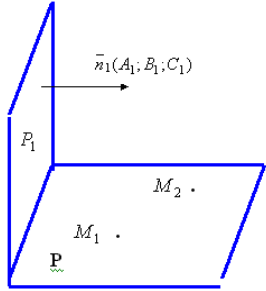
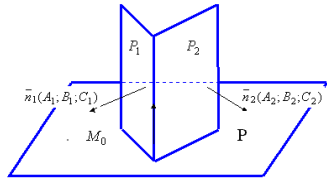
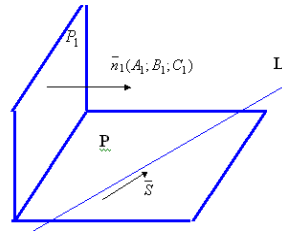
№ п/п	Исходные данные		Решение	Рисунок
4	Точка и вектор, перпендикулярный плоскости	$M_0(x_0; y_0; z_0) \in P,$ $\vec{n}(A; B; C),$ $\vec{n} \perp P$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0,$ $Ax + By + Cz + D = 0,$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	 <p>The diagram shows a parallelogram representing a plane P. A point M0 is located on the plane. A vector n, labeled n(A, B, C), originates from M0 and points upwards, perpendicular to the plane.</p>
5	Точка и плоскость, параллельная искомой плоскости	$M_0(x_0; y_0; z_0) \in P,$ $\vec{n}_1(A; B; C),$ $\vec{n}_1 \perp P; P_1 \perp P$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0,$ $Ax + By + Cz + D = 0,$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$	 <p>The diagram shows two parallel planes, P (bottom) and P1 (top). A point M0 is on plane P. A vector n originates from M0 and points upwards, perpendicular to plane P. Another vector n1, labeled n1(A, B, C), originates from a point on plane P1 and points upwards, perpendicular to plane P1. The vectors n and n1 are parallel.</p>

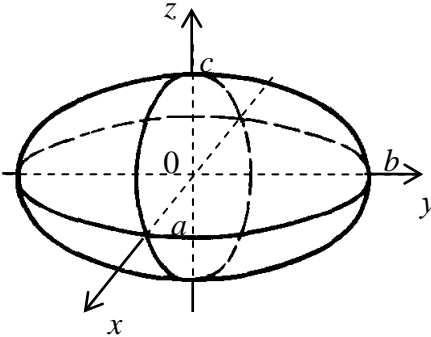
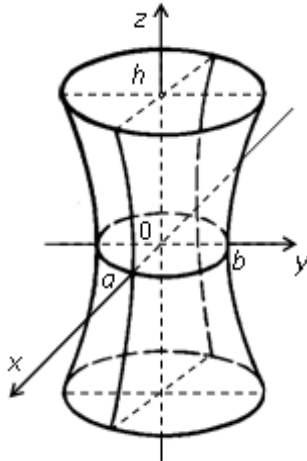
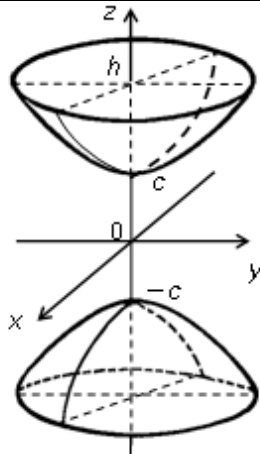
Методы решения задач на прямую в пространстве

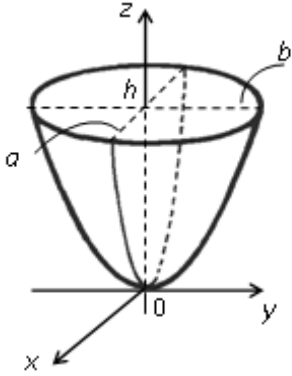
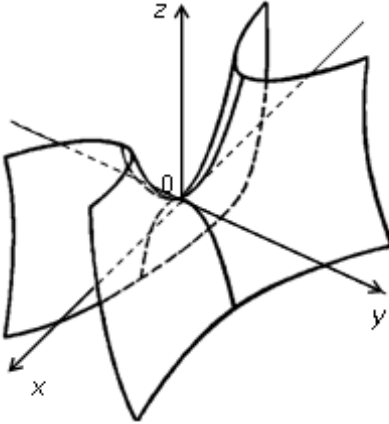
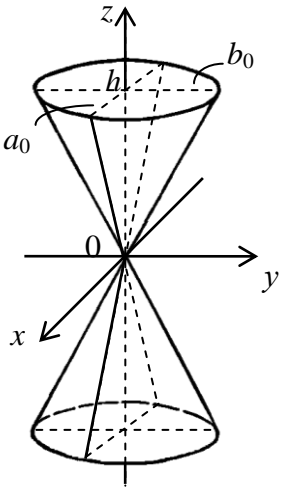
№ п/п	Исходные данные		Решение	Рисунок
1	Точка и прямая, принадлежащая искомой плоскости	$M_0 (x_0; y_0; z_0) \in P,$ $\bar{S} (m; n; p),$ $L \in P; \bar{S} \parallel L,$ $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$	
2	Точка и две параллельные прямые, параллельные искомой плоскости	$M_0(x_0; y_0; z_0) \in P,$ $L_1 \parallel L_2 \parallel P,$ $M_1 (x_1; y_1; z_1) \in L_1,$ $M_2 (x_2; y_2; z_2) \in L_2,$ $\bar{S} (m; n; p) \parallel L_1$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$	
3	Точка и две пересекающиеся прямые, параллельные искомой плоскости	$M_0 (x_0; y_0; z_0) \in P,$ $L_1 \parallel L_2 \parallel P,$ $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$	

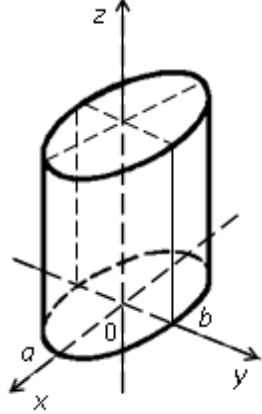
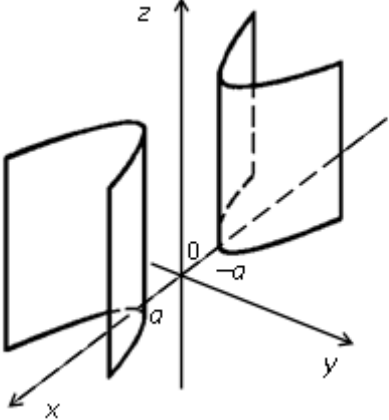
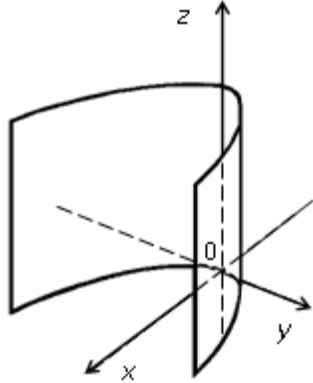
№ п/п	Исходные данные		Решение	Рисунок
4	Две точки и прямая, параллельная искомой плоскости	$M_1 (x_1; y_1; z_1),$ $M_2 (x_2; y_2; z_2),$ $M_1, M_2 \in P,$ $\overline{S} (m; n; p) \parallel L,$ $L \parallel P$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$	
5	Две пересекающиеся прямые, принадлежащие искомой плоскости	$L_1, L_2 \in P,$ $\overline{S}_1 (m_1; n_1; p_1),$ $\overline{S}_2 (m_2; n_2; p_2),$ $M_1 \in L_1; M_2 \in L_2,$ $\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$	
6	Две прямые: одна принадлежит, другая параллельна искомой плоскости	$L_1 \in P; L_2 \parallel P,$ $\overline{S}_1 (m_1; n_1; p_1),$ $\overline{S}_2 (m_2; n_2; p_2),$ $M_1 (x_1; y_1; z_1) \in L_1,$ $\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$	

Методы решения задач на взаимное расположение плоскостей

№ п/п	Исходные данные		Решение	Рисунок
1	Две точки и плоскость, перпендикулярная искомой плоскости	$M_1(x_1; y_1; z_1),$ $M_2(x_2; y_2; z_2),$ $M_1, M_2 \in P,$ $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1),$ $\vec{n}_1 \perp P_1; P_1 \perp P$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$	
2	Точка и две плоскости, перпендикулярные искомой плоскости	$M_0(x_0; y_0; z_0),$ $M_0 \in P,$ $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1),$ $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2),$ $\vec{n}_1 \perp P_1; P_1 \perp P,$ $\vec{n}_2 \perp P_2; P_2 \perp P$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$	
3	Прямая, принадлежащая искомой плоскости и плоскость, перпендикулярная искомой	$L \subset P;$ $\vec{S}(m; n; p) \parallel L,$ $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1),$ $\vec{n}_1 \perp P_1; P_1 \perp P,$ $M_0(x_0; y_0; z_0),$ $M_0 \in L,$ $\vec{n}_1 \parallel \vec{S}$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$	

№ п/п	Название	Уравнение	Изображение
1	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
2	Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
3	Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	

4	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$	
5	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$	
6	Эллиптический конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	

7	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
8	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
9	Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$	

Ответы на тестовые задания

1. «Прямая на плоскости»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
г	б	а	б	б	а	в	а	г	б	в	а	г	б	а	а	в	г	а	б	г	а	б	а	б	г	в	а

2. «Кривые второго порядка»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
в	в	б	а	г	в	а	б	г	а	в	в	г	в	а	г
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
а	г	а	а	б	б	а	в	в	в	в	а	б	в	б	а

3. «Плоскость в пространстве»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
г	в	а	в	г	а	в	в	а	б	в	г

4. «Прямая в пространстве»

1	2	3	4	5	6	7	8
в	а	а	в	в	а	б	г

5. «Прямая и плоскость в пространстве»

1	2	3	4	5	6	7	8	9
г	в	б	а	г	в	а	в	б

Учебное издание

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Авторы-составители:

ДЕМИН Сергей Евгеньевич
ДЕМИНА Елена Леонидовна

Редактор *Н. А. Чудина*

Подписано к печати 19.09.2016. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Ризография.
Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 19,04. Тираж 50 экз. Заказ № 2006.

Редакционно-издательский отдел
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
Нижнетагильский технологический институт (филиал)
622031, г. Нижний Тагил, ул. Красногвардейская, 59

Отпечатано в РИО НТИ (филиал) УрФУ