

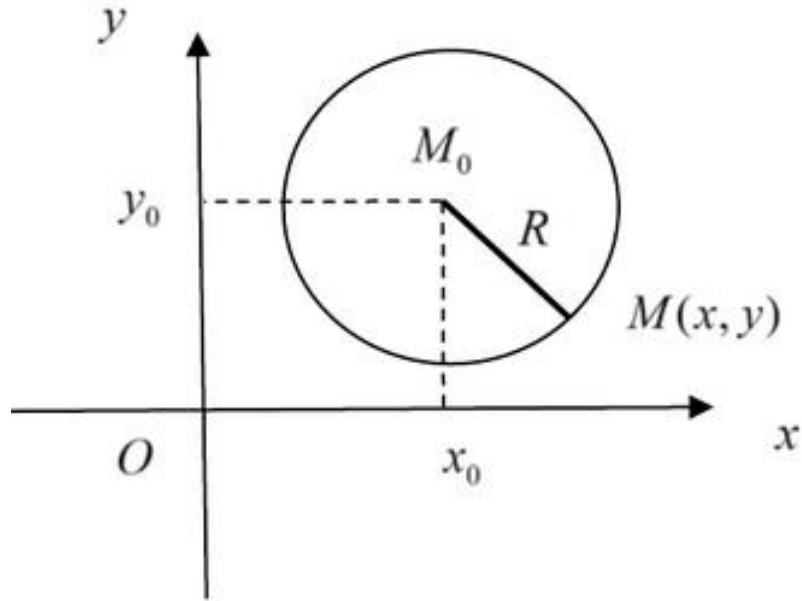
кривые

Кривая — геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Коэффициенты этого уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

окружность



Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой центром.

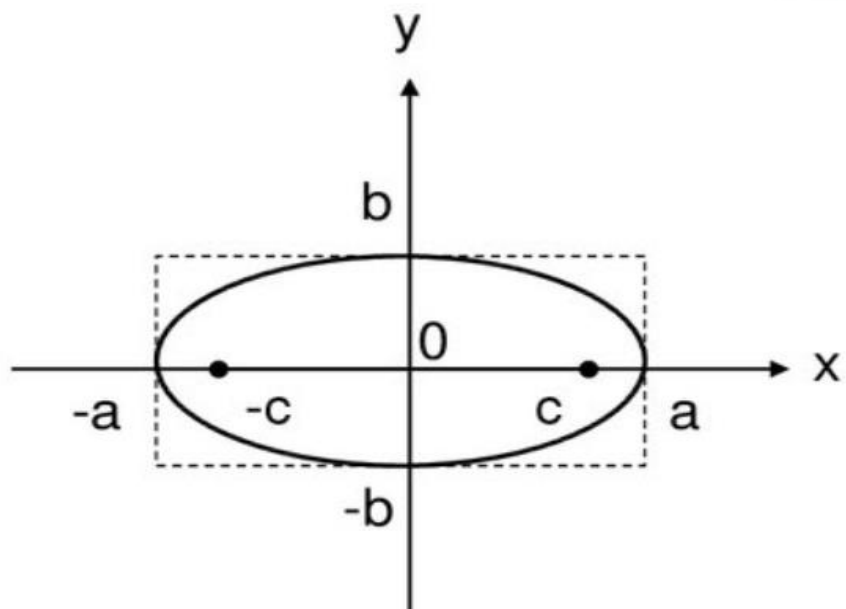
Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит окружности, тогда по определению $|M_0M| = R$, т.е.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Уравнение называется каноническим уравнением окружности с центром в точке $M(x, y)$ и радиусом R .

В частности, уравнение окружности с центром в начале координат есть $x^2 + y^2 = R^2$

ЭЛЛИПС



Каноническое уравнение эллипса
с центром в точке $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Множество точек плоскости, для которых
сумма расстояний от двух заданных точек,
называемых фокусами, есть величина
постоянная, большая расстояния между
фокусами.

a, b – **полуоси** эллипса;

$M_1(a;0); M_2(-a;0); M_3(0;b); M_4(0;-b)$ –
вершины эллипса;

$F_1(c;0); F_2(-c;0)$ – фокусы;

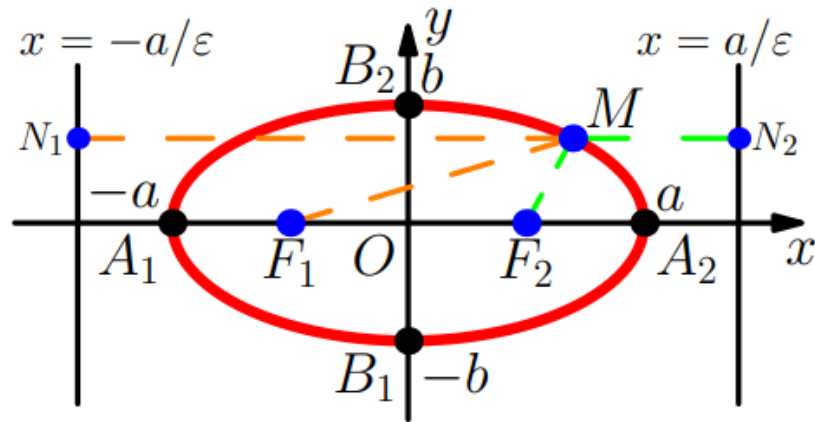
$\varepsilon = \frac{c}{\text{большая полуось}} < 1$ – эксцентриситет;

$$(\text{большая полуось})^2 = (\text{меньшая полуось})^2 + c^2.$$

Если центр эллипса находится в точке $O'(x_0; y_0)$,
то уравнение имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

ЭЛЛИПС



точка O – центр эллипса
 точки A_1, A_2 и B_1, B_2 – вершины эллипса
 отрезки A_1A_2 и B_1B_2 большая ($2a$) и малая ($2b$) оси эллипса
 отрезки OA_2 и OB_2 большая (a) и малая (b) полуоси эллипса
 расстояние между F_1 и F_2 , равное $2c$, - фокальное (фокусное) расстояние
 число c – полуфокусное расстояние
 ось, на которой лежат фокусы, - фокальная ось эллипса.

Пусть фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно точки O , и пусть расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$ и по определению эллипса $2a > 2c$.

По формуле расстояния между двумя точками

$$MF_1 = |\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

$$MF_2 = |\overrightarrow{MF_2}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Тогда из равенства $MF_1 + MF_2 = 2a$ получаем

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перенеся второе слагаемое в левой части последнего равенства в правую часть и возведя обе части в квадрат, получим

$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

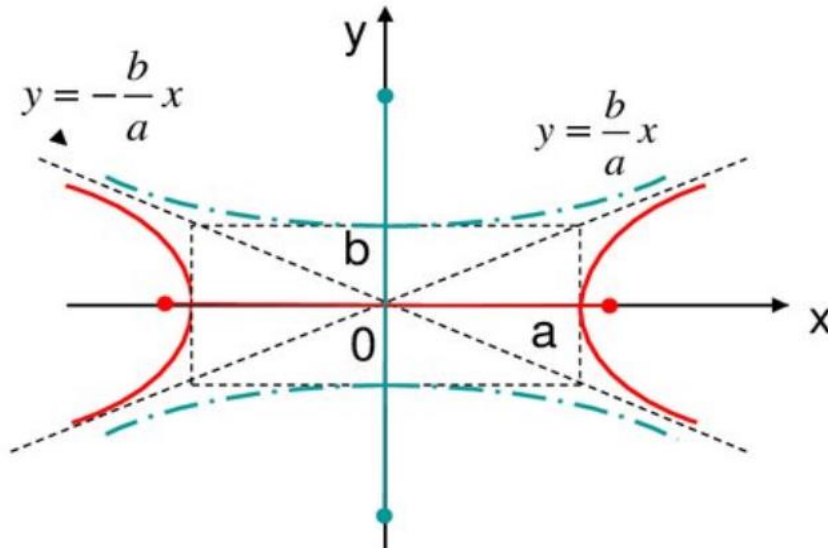
Еще раз возведем обе части получившегося равенства в квадрат и разделим на $a^2(a^2 - c^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Полагая $a^2 - c^2 = b^2$, придем к **каноническому уравнению эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

гипербола



Каноническое уравнение гиперболы с центром симметрии в точке $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Уравнение сопряженной гиперболы:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

a – действительная полуось; (b)

b – мнимая полуось; (a)

точки пересечения с осями $M_1; M_2$ – вершины гиперболы;

$F_1(c;0); F_2(-c;0)$ – фокусы; $c^2 = a^2 + b^2$.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы;

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – эксцентриситет;

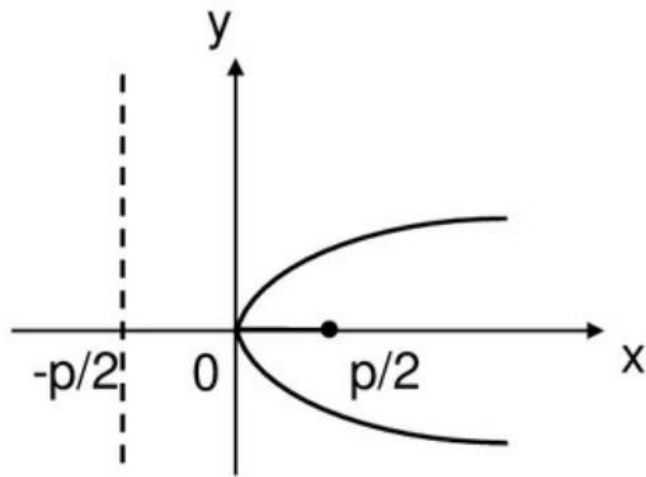
Если центр симметрии – $O'(x_0; y_0)$,

то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Уравнения асимптот: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$.

парабола



Множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от заданной точки, называемой фокусом и прямой, называемой директрисой.

p – параметр;

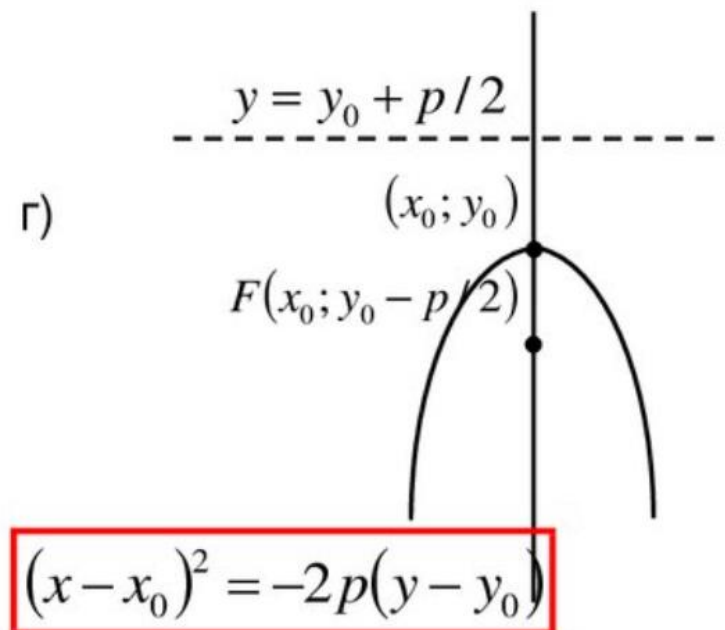
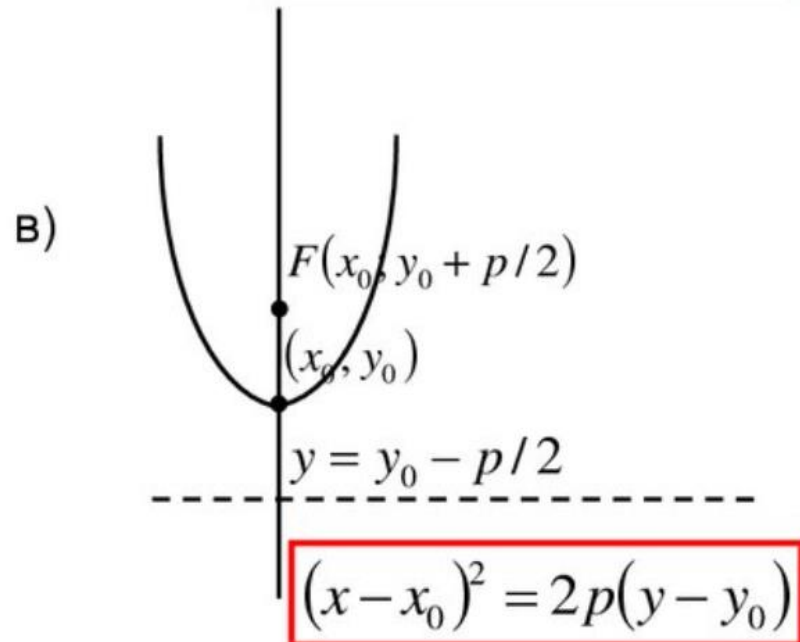
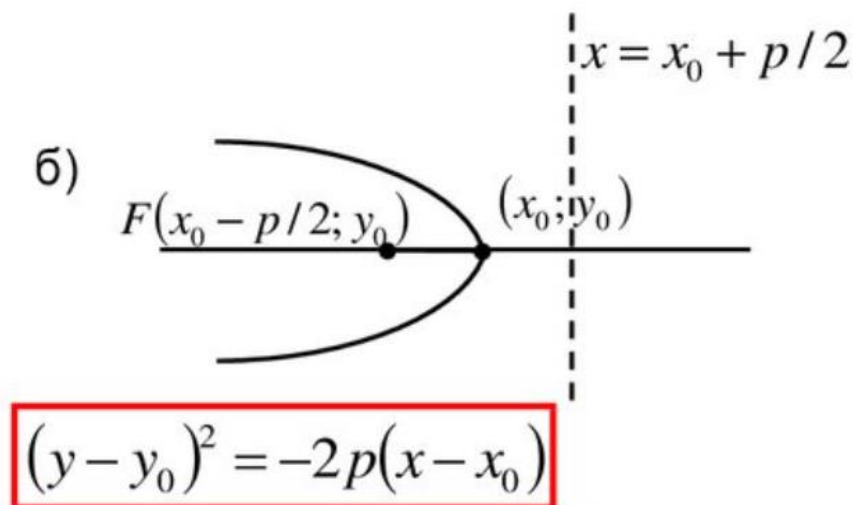
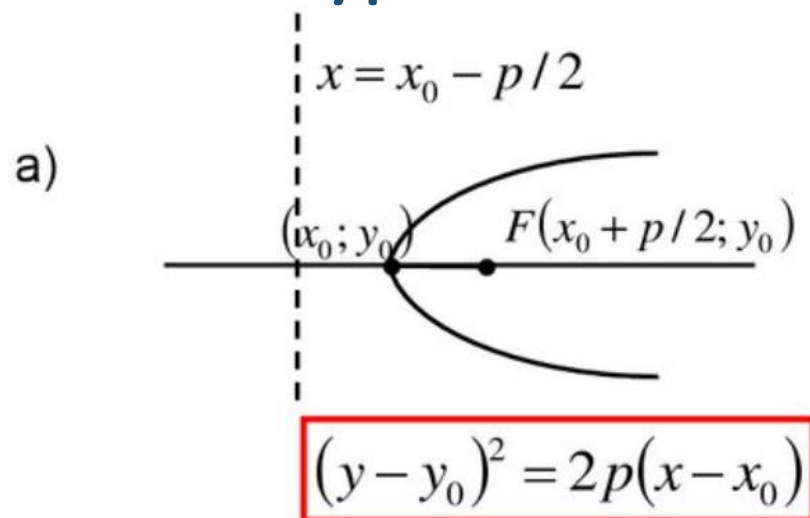
$O(0;0)$ – вершина;

$F(p/2;0)$ – фокус;

$x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

Уравнение параболы: $y^2 = 2px$

каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O(x_0; y_0)$



если уравнение кривой записано в виде

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 ,$$

то при

$A=B$ кривая является окружностью;

$A \cdot B > 0$ кривая является эллипсом;

$A \cdot B < 0$ кривая является гиперболой;

$A=0$ и $B \neq 0$ кривая является параболой;

$A \neq 0$ и $B=0$ кривая является параболой.

1. Привести уравнения кривых к каноническому виду
2. Построить все кривые на одной координатной плоскости

1. $y^2 - 4y + 8x - 84 = 0;$

2. $y^2 - 4y - 8x - 52 = 0;$

3. $x^2 + 4y^2 - 40y + 2x + 97 = 0;$

4. $x^2 + 4y^2 - 40y - 10x + 121 = 0;$

5. $x^2 + y^2 - 4y - 4x + 7 = 0;$

6. $x^2 + y^2 + 6y - 4x + 9 = 0;$

7. $x^2 + y^2 - 10y + 2x + 25 = 0;$

8. $x^2 + y^2 - 10y - 10x + 49 = 0;$

9. $64x^2 - 36y^2 + 144y - 256x + 2416 = 0;$

10. $4x^2 + y^2 - 4y - 96x + 576 = 0;$

11. $4x^2 + y^2 - 4y + 64x + 256 = 0.$