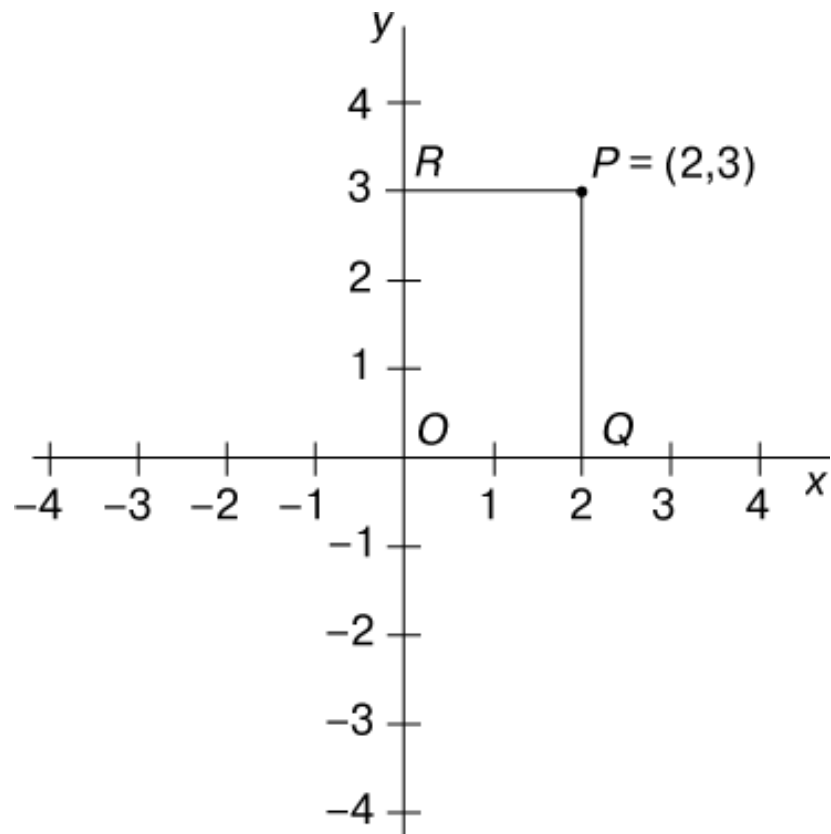


определение

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, раздел геометрии, который исследует простейшие геометрические объекты средствами элементарной алгебры на основе метода координат.

Методы аналитической геометрии применимы к фигурам на плоскости и к поверхностям в трехмерном пространстве, а также допускают естественное обобщение и на пространства более высоких размерностей.

ОСНОВА МЕТОДА

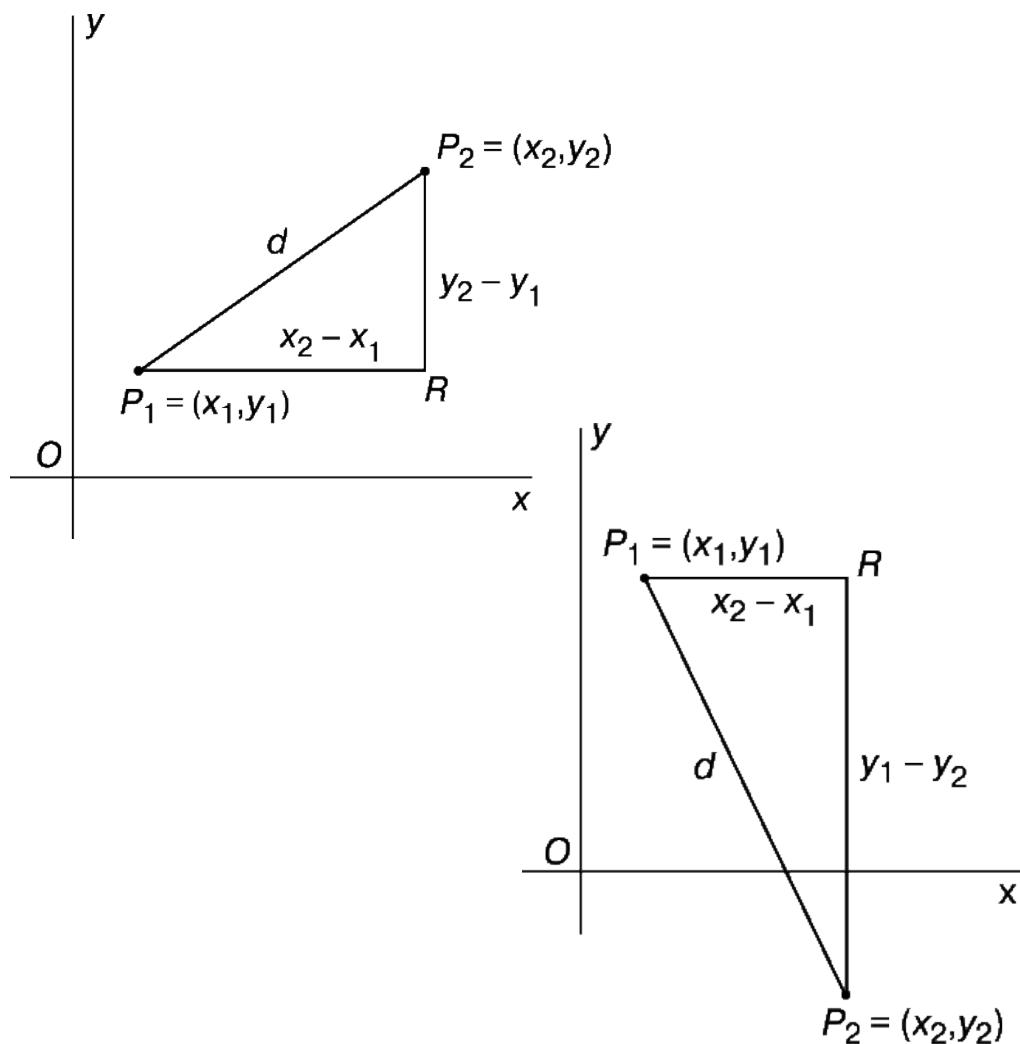


Две взаимно перпендикулярные прямые, называемые осью x и осью y , составляют основу для большинства операций в аналитической геометрии на плоскости. Именно они позволяют использовать алгебраические средства в геометрии и геометрические – в алгебре. Будучи снабженными шкалами, они представляют координаты точки. Например, точка P имеет координату x , равную 2, и координату y , равную 3.

основная задача

Основная задача аналитической геометрии заключается в изучении геометрических фигур с помощью **соотношений между координатами точек**, из которых эти фигуры образованы. **Любую фигуру можно рассматривать как множество точек**, удовлетворяющих некоторому геометрическому условию. Это условие можно записать **в виде алгебраического уравнения**, связывающего координаты x и y каждой точки фигуры. Суть метода аналитической геометрии состоит в **изучении свойств фигуры с помощью соответствующего уравнения**, исследуемого средствами алгебры. Этот метод позволяет устанавливать геометрические факты систематичным образом, в отличие от традиционной «синтетической» геометрии, где приходилось изобретать методы доказательства для каждого отдельного случая.

ОСНОВНОЙ ИНСТРУМЕНТ



Основным инструментом аналитической геометрии служит формула для вычисления расстояния между двумя точками $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$. Числа x_1 , y_1 , x_2 и y_2 могут быть любыми действительными числами, положительными, отрицательными или 0. На рис. 2 все числа выбраны положительными. Проведем через точку P_1 горизонтальную прямую, а через точку P_2 – вертикальную. Пусть R – точка их пересечения. Тогда по теореме Пифагора $(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (P_2R)^2$,

прямые

В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени и, наоборот, каждое уравнение первой степени определяет прямую.

$Ax + By + C = 0$ общее уравнение прямой

Угол α угол наклона прямой к оси Ох.

$k = \tan \alpha$ тангенс угла наклона прямой к оси Ох - угловой коэффициент прямой

$y = kx + b$ уравнение прямой с угловым коэффициентом

b - величина отрезка, который отсекает прямая на оси Оу, считая от начала координат.

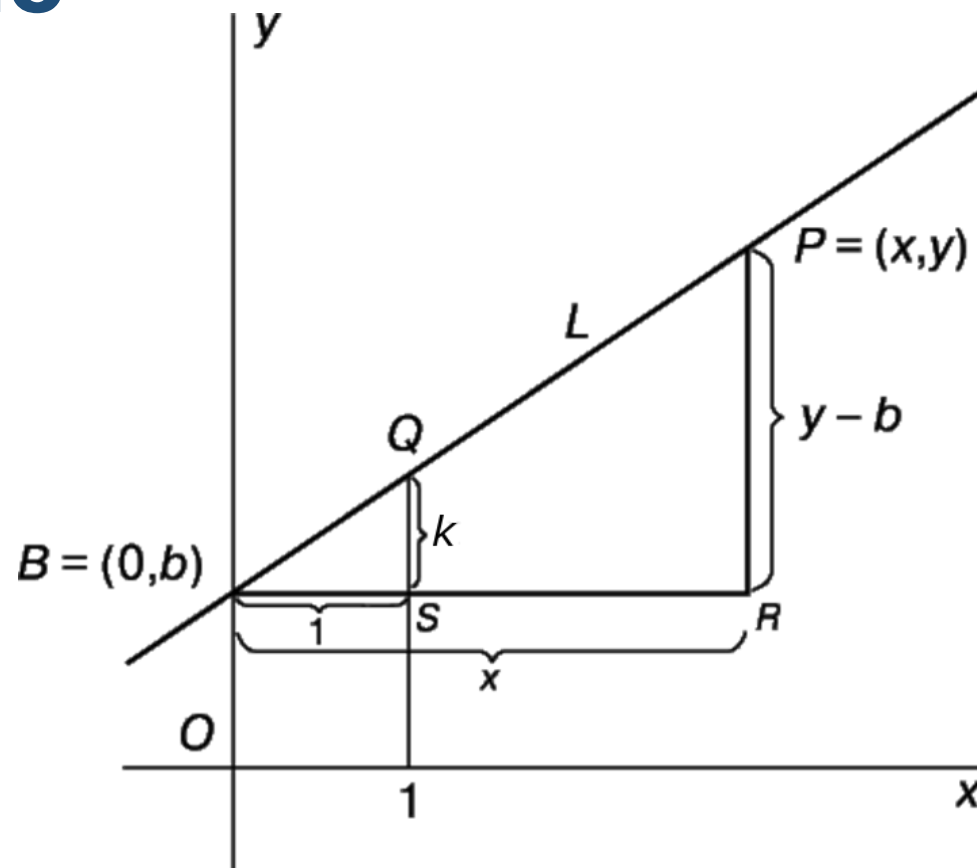
$$k = -\frac{A}{B}$$

$y - y_0 = k(x - x_0)$ уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент k.

прямые

Прямая — одна из простейших геометрических фигур. Алгебраическое уравнение прямой также имеет простой вид.

Пусть $B = (0, b)$ — точка пересечения прямой L с осью y , а $P = (x, y)$ — любая другая точка на этой прямой. Проведем через точку B прямую, параллельную оси x , а через точку P — прямую, параллельную оси y ; проведем также прямую $x = 1$. Пусть k — угловой коэффициент прямой L . Так как треугольники BSQ и BRP подобны, то



$$\frac{y - b}{x} = \frac{k}{1} \quad y = kx + b$$

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то ее угловой коэффициент определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{уравнение прямой, проходящей через две точки } M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$$

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле

$$\tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2.$$

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение

$$k_1 k_2 = -1, \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Иначе говоря, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ один или два из трех коэффициентов (считая и свободный член) обращаются в нуль, то уравнение называется **неполным**. Возможны следующие случаи:

1) $C=0$; уравнение имеет вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат

2) $B=0$ ($A \neq 0$); уравнение имеет вид $Ax + C = 0$ и определяет прямую, перпендикулярную к оси Ox . Это уравнение может быть записано в виде $x=a$, где $a = -\frac{C}{A}$ является величиной отрезка, который отсекает прямая на оси Ox , считая от начала координат.

3) $B=0, C=0 (A \neq 0)$; уравнение может быть записано в виде $x=0$ и определяет ось ординат.

4) $A=0 (B \neq 0)$; уравнение имеет вид $Bu + C = 0$ и определяет прямую, перпендикулярную к

оси Oy . Это уравнение может быть записано в виде $y=b$, где $b = -\frac{C}{B}$ является величиной отрезка, который отсекает прямая на оси Oy , считая от начала координат.

5) $A=0, C=0 (B \neq 0)$; уравнение может быть записано в виде $y=0$ и определяет ось абсцисс.

Если ни один из коэффициентов уравнения не равен нулю, то его можно преобразовать к виду (уравнением прямой «в отрезках»)

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях.

Если две прямые даны уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то могут представиться три случая:

а) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ - прямые имеют одну общую точку;

б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ - прямые параллельны;

в) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - прямые сливаются, то есть оба уравнения определяют одну и ту же прямую.

Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку S , называется пучком прямых с центром в S .

Если $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S , то уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (1)$$

где α, β - какие угодно числа, не равные одновременно нулю, определяет прямую, также проходящую через точку S .

Более того, в уравнении (1) числа α, β всегда возможно подобрать так, чтобы оно определило любую (заранее назначенную) прямую, проходящую через точку S , иначе говоря, любую прямую пучка с центром S . Поэтому уравнение вида (1) называется уравнением пучка (с центром в S).

Если $\alpha \neq 0$, то, деля обе части уравнения (1) на α и полагая $\beta / \alpha = \lambda$, получим

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (2)$$

Этим уравнением можно определить любую прямую пучка с центром S , кроме той, которая соответствует $\alpha=0$, то есть кроме прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

задачи

1. Определить, какие из точек $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$ и какие на ней не лежат.

2. Определить, при каких значениях a и b две прямые , $ax - 2y - 1 = 0$ и $6x - 4y - b = 0$:

1 Имеют одну общую точку;

2 Параллельны;

3 Совпадают

3. Установить, пересекаются ли в одной точке три прямые в следующих случаях:

1 $2x + 3y - 1 = 0$ $4x - 5y + 5 = 0$ $3x - y + 2 = 0$

2 $3x - y + 3 = 0$ $5x + 3y - 7 = 0$ $x - 2y - 4 = 0$

3 $2x - y + 1 = 0$ $x + 2y - 17 = 0$ $x + 2y - 3 = 0$

задачи

4. В треугольнике ABC даны уравнения высоты AN: $x + 5y - 3 = 0$, высоты BN: $x + y - 1 = 0$ и стороны AB: $x + 3y - 1 = 0$. Не определяя координат вершин и точки пересечения высот треугольника, составить уравнение двух других сторон и третьей высоты.
5. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.
6. Стороны треугольника лежат на прямых $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Вычислить его площадь S.
7. В каждом из следующих случаев составить уравнение прямой, параллельной двум данным прямым и проходящей посередине между ними:
- | | | |
|---|-------------------|--------------------|
| 1 | $3x - 2y - 1 = 0$ | $3x - 2y - 13 = 0$ |
| 2 | $5x + y + 3 = 0$ | $5x + y - 17 = 0$ |